

Chapitre 1 : équations différentielles ordinaires

1	Introduction à la modélisation	1
2	Existence et unicité de solutions : théorème de Cauchy-Lipschitz	2
3	Points d'équilibre et stabilité des points d'équilibre	3
4	Résolution numérique	4
5	Exercices	6

1 Introduction à la modélisation

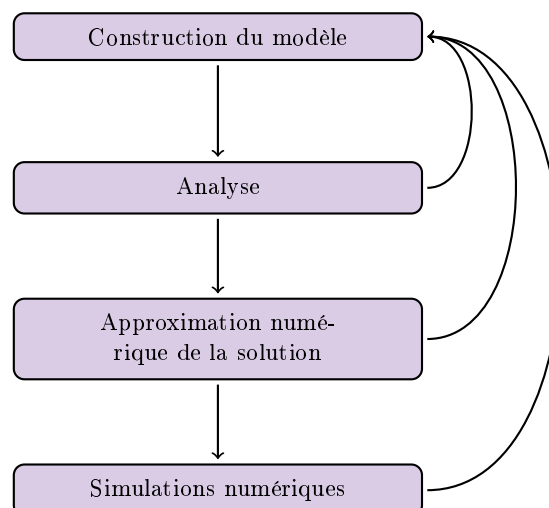
Modéliser un phénomène physique, biologique, chimique, . . . , consiste à construire un « modèle », c'est-à-dire une équation (relation de récurrence, équation algébrique, équation différentielle ordinaire, équation aux dérivées partielles, . . .) dont la solution est une approximation de la grandeur considérée. Par exemple, en dynamique des populations, on s'intéressera à des EDO dont les solutions approchent l'effectif d'une population. Le modèle ainsi construit repose nécessairement sur des hypothèses simplificatrices dont il convient d'étudier les conséquences. De même, les solutions sont censées vérifier certaines propriétés mathématiques (signe, monotonie, . . .). Si ce n'est pas le cas, le modèle doit être modifié. Il est donc important de savoir évaluer l'erreur commise entre le modèle et la réalité.

Il faut également souligner qu'il n'est pas toujours possible de résoudre explicitement le modèle construit. Après avoir vérifié certains aspects théoriques (existence, propriétés mentionnées précédemment, . . .), on construit alors une solution approchée à l'aide de méthodes numériques. Il est là aussi important de contrôler l'erreur commise par le processus d'approximation par rapport à la solution exacte.

À chaque étape, si les conditions nécessaires de validité du modèle ne sont pas réunies (par exemple s'il n'y a pas unicité de la solution, ou si celle-ci ne respecte pas un principe de positivité, . . .), on revient au modèle de départ pour l'amender.

On rappelle qu'on ne considérera dans le cadre de ce cours que des approches déterministes, c'est-à-dire que l'on ne prend pas en compte de phénomènes aléatoires.

La démarche globale peut donc se résumer par le graphique ci-dessous :



2 Existence et unicité de solutions : théorème de Cauchy-Lipschitz

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . Dans cette section, on s'intéresse à des systèmes différentiels du type

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)), \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0. \end{cases} \quad (\text{P})$$

où les données sont $t_0 \in I$, $\mathbf{u}_0 \in \Omega$ et $\mathbf{f} : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, et l'inconnue est la fonction \mathbf{u} à valeurs dans \mathbb{R}^n . On dit que le système est autonome si la fonction \mathbf{f} ne dépend pas de la variable t .

On souhaite en particulier prouver qu'il existe une unique solution au problème (P).

Définition 2.1 (Fonction localement lipschitzienne). *Une fonction $\mathbf{f} : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état (ou seconde variable) si, pour tout $(t_0, \mathbf{u}_0) \in I \times \Omega$, il existe $C_{(t_0, \mathbf{u}_0)} > 0$ et un voisinage $\mathcal{V} \subset I \times \Omega$ de (t_0, \mathbf{u}_0) tel que*

$$\forall t \in I, \quad \forall (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in \Omega^2 \text{ tel que } (t, \mathbf{u}_1) \in \mathcal{V} \text{ et } (t, \mathbf{u}_2) \in \mathcal{V}, \quad \|\mathbf{f}(t, \mathbf{u}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{u}_2)\| \leq C_{(t_0, \mathbf{u}_0)} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|.$$

En particulier, toute fonction \mathbf{f} de classe \mathcal{C}^1 par rapport à \mathbf{u} est localement lipschitzienne.

Théorème 2.1 (Cauchy-Lipschitz). *Soient I un intervalle de \mathbb{R} , Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et $\mathbf{f} : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue, localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état (la deuxième variable). Alors pour tout $(t_0, \mathbf{u}_0) \in I \times \Omega$, il existe un intervalle de temps maximal unique $J = (a, b) \subset I$ (éventuellement infini) contenant t_0 et une unique fonction $\mathbf{u} : J \rightarrow \Omega$ de classe \mathcal{C}^1 qui vérifie (P).*

Remarques 2.1. *La propriété d'existence de solutions maximales persiste sous la seule hypothèse de continuité de \mathbf{f} (théorème de Cauchy-Arzela). L'exemple canonique d'équation pour laquelle le problème de Cauchy n'a pas de solution unique est l'équation $u' = 2\sqrt{|u|}$, qui possède une infinité de solutions vérifiant $u(0) = 0$, dont la fonction identiquement nulle et la fonction $u(t) = |t|$ (qui est bien de classe \mathcal{C}^1).*

Corollaire 2.1. *On se place sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz. Deux trajectoires différentes ne peuvent se couper au même temps t . Pour un système différentiel autonome, deux trajectoires différentes ne peuvent se couper.*

Corollaire 2.2 (Explosion en temps fini). *On se place sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz. Soit (J, \mathbf{u}) la solution maximale de (P). On note $J =]a, b[$.*

- Si $b \in I$, alors $\limsup_{t \rightarrow b} \|\mathbf{u}(t)\| = +\infty$;
- Si $a \in I$, alors $\limsup_{t \rightarrow a} \|\mathbf{u}(t)\| = +\infty$.

Remarques 2.2. *Soit la solution explose en temps fini, soit la solution est globale en temps. En particulier, si on montre qu'une solution maximale est bornée, elle est globale en temps (la réciproque est fausse).*

Il existe une version plus forte du théorème 2.1 (sous des hypothèses plus restrictives) :

Théorème 2.2 (Cauchy-Lipschitz, version globale). *Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction uniformément lipschitzienne relativement à la variable d'état :*

$$\exists C > 0, \quad \forall (t, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}, \quad \|\mathbf{f}(t, \mathbf{u}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{u}_2)\| \leq C \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|.$$

Alors, pour tout $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe une unique solution $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ au problème (P).

On rappelle par ailleurs un résultat très utile en analyse des EDO :

Lemme 2.1 (Grönwall). *Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Soient z et ϕ deux fonctions continues positives sur $[a, b]$ à valeurs réelles telles que :*

$$\forall t \in [a, b], \quad z'(t) \leq \phi(t)z(t).$$

Alors on a l'estimation suivante :

$$\forall t \in [a, b], \quad z(t) \leq z(a) \exp\left(\int_a^t \phi(s) ds\right).$$

3 Points d'équilibre et stabilité des points d'équilibre

Dans la suite, nous supposons que les systèmes différentiels considérés sont *autonomes*.

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{u}(t)), \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0. \end{cases} \quad (\text{A})$$

Le paragraphe précédent donne des indications sur la pertinence du modèle : l'existence de solutions est un premier élément incontournable. Lorsqu'il n'est pas possible de résoudre une EDO non-linéaire, on s'intéresse à certaines propriétés qualitatives telles que la stabilité des points d'équilibre.

Définition 3.1 (Point stationnaire ou point d'équilibre). *Un point stationnaire $\bar{\mathbf{u}}$ de l'EDO (A) vérifie*

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}.$$

Ainsi, pour tout point stationnaire $\bar{\mathbf{u}}$, la fonction \mathbf{u} définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}}$$

est une solution de (A) pour $\mathbf{u}_0 = \bar{\mathbf{u}}$: si l'on part de $\bar{\mathbf{u}}$, on reste en $\bar{\mathbf{u}}$.

On cherche désormais à comprendre la dynamique si \mathbf{u}_0 est au voisinage d'un point fixe $\bar{\mathbf{u}}$. Autour de $\bar{\mathbf{u}}$, on peut faire un développement limité

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}}) + \mathcal{J}_{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{u}})(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) + \mathcal{O}(\|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}\|^2), \quad (3.1)$$

où $\mathcal{J}_{\mathbf{f}}$ désigne la matrice jacobienne de \mathbf{f} : $(\mathcal{J}_{\mathbf{f}})_{ij} = \partial_j f_i$. Intuitivement, il est tentant de se dire que lorsque \mathbf{u} est « proche » de $\bar{\mathbf{u}}$, la dynamique du système (P) devrait « ressembler » (ici $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}$) à celle du système linéarisé autour de $\bar{\mathbf{u}}$:

$$\tilde{\mathbf{u}}'(t) = \mathcal{J}_{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{u}}) \cdot (\tilde{\mathbf{u}}(t) - \bar{\mathbf{u}}) \quad (3.2)$$

Cette idée est valable dans un certain nombre de cas (mais elle est fautive dans le cas général). C'est la question de la « stabilité » des états d'équilibre :

Définition 3.2 (Stabilité). *On dit que $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^n$, point d'équilibre de (A), est stable si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, (\|\mathbf{u}_0 - \bar{\mathbf{u}}\| < \eta \implies \forall t \in J, \|\mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}\| < \varepsilon).$$

Si, de plus, lorsque la solution est globale,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}\| = 0,$$

le point $\bar{\mathbf{u}}$ est dit asymptotiquement stable.

On peut alors, dans certains cas, étudier la dynamique au voisinage d'un point d'équilibre d'un système non linéaire à partir des propriétés du système linéarisé :

Théorème 3.1 (Conditions de stabilité et d'instabilité). *Soit \mathbf{f} de classe \mathcal{C}^2 dans un voisinage \mathcal{U} d'un point stationnaire $\bar{\mathbf{u}}$:*

- *si toutes les valeurs propres de $\mathcal{J}_{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{u}})$ ont des parties réelles strictement négatives, alors $\bar{\mathbf{u}}$ est asymptotiquement stable ;*
- *s'il existe une valeur propre de $\mathcal{J}_{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{u}})$ qui a une partie réelle strictement positive, alors $\bar{\mathbf{u}}$ est instable.*

Si la matrice jacobienne $\mathcal{J}_{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{u}})$ admet des valeurs propres de parties réelles positives ou nulles (supposons qu'au moins l'une d'entre elles soit nulle), alors le théorème de linéarisation précédent ne permet pas de conclure quant à la stabilité du point d'équilibre. Mais le théorème de Lyapunov permet de compléter, parfois, l'étude :

Théorème 3.2 (Lyapunov). Soient \mathcal{U} un voisinage de $\bar{\mathbf{u}}$ dans Ω et $\mathcal{L} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et différentiable sur $\mathcal{U} \setminus \{\bar{\mathbf{u}}\}$. On suppose que

- $\mathcal{L}(\bar{\mathbf{u}}) = 0$;
- $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{U} \setminus \{\bar{\mathbf{u}}\}, \mathcal{L}(\mathbf{u}) > 0$;
- $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{U} \setminus \{\bar{\mathbf{u}}\}, \langle \mathbf{f}(\mathbf{u}), \nabla \mathcal{L}(\mathbf{u}) \rangle \leq 0$.

\mathcal{L} est appelée fonction de Lyapunov. Si le système (A) admet une fonction de Lyapunov associée à un point d'équilibre $\bar{\mathbf{u}}$, alors ce point d'équilibre est stable.

Donnons une interprétation qualitative du théorème de Lyapunov. Soit \mathbf{u} une solution du système (A). Si l'on note $\ell(t) = \mathcal{L}(\mathbf{u}(t))$, on remarque que les hypothèses du théorème implique que :

- Pour tout $t \in J$, $\ell(t) \geq 0$;
- La fonction ℓ décroît le long de la trajectoire $t \mapsto \mathbf{u}(t)$. En effet, ℓ est dérivable sous les hypothèses de régularité de \mathbf{f} et de \mathcal{L} , avec :

$$\ell'(t) = \sum_{i=1}^n u'_i(t) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(\mathbf{u}(t)) \stackrel{(A)}{=} \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{u}(t)) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(\mathbf{u}(t)) = \langle \mathbf{f}(\mathbf{u}(t)), \nabla \mathcal{L}(\mathbf{u}(t)) \rangle \leq 0.$$

4 Résolution numérique

On a vu dans les paragraphes précédents les informations qualitatives dont on pouvait disposer au sujet d'un système différentiel autonome (A) : existence, unicité, intervalle d'existence, stabilité des points d'équilibre. Toutefois, la plupart du temps, il n'est pas possible de résoudre explicitement l'équation pour obtenir une expression analytique de la solution. Dans ce paragraphe, on donne les grandes lignes des méthodes numériques permettant de construire des solutions approchées. La philosophie de ces méthodes consiste à passer du continu au discret : au lieu de considérer une fonction $\hat{\mathbf{u}}$ définie pour une infinité de valeurs $t \in I$ (que l'on appellera par la suite *solution continue*), on va construire une suite \mathbf{u}_n (que l'on appellera par la suite *solution discrète*) qui approche les valeurs de la solution exacte en un nombre fini de points t_n :

$$\mathbf{u}_n = \hat{\mathbf{u}}(t_n) + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

où ε est un paramètre de discrétisation qui contrôle l'erreur commise.

Principes généraux. On se place sur un intervalle de temps $I = [t_*, t_* + \ell]$ et on se donne un entier $N \in \mathbb{N}^*$. On construit alors un maillage de l'intervalle I :

$$t_n = t_* + (n-1)\Delta t, \quad 1 \leq n \leq N-1, \quad \text{où} \quad \Delta t = \frac{\ell}{N-1}.$$

Les nombres t_n sont appelés les **noeuds** du maillage, Δt le **pas** du maillage et N représente le nombre de noeuds (il y a donc $N-1$ sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$).

La solution exacte de l'EDO

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)), \\ \mathbf{u}(t_*) = \mathbf{u}_*, \end{cases} \quad (4.1)$$

vérifie donc en chaque noeud :

$$\hat{\mathbf{u}}'(t_n) = \mathbf{f}(t_n, \hat{\mathbf{u}}(t_n)) \quad (4.2)$$

mais également

$$\hat{\mathbf{u}}(t_{n+1}) - \hat{\mathbf{u}}(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(\tau, \hat{\mathbf{u}}(\tau)) \, d\tau. \quad (4.3)$$

Schématiquement, une méthode numérique pour construire une solution approchée de l'EDO (P) revient soit à construire une formule d'approximation par la dérivée dans (4.2), soit à construire une formule de quadrature pour l'intégrale dans (4.3).

Méthodes d'Euler. Soit φ une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur l'intervalle I . Alors pour h suffisamment petit et $t \in I$, on a, par développement de Taylor :

$$\varphi(t+h) = \varphi(t) + h\varphi'(t) + \mathcal{O}(h^2) \implies \varphi'(t) = \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} + \mathcal{O}(h). \quad (4.4)$$

En prenant $t = t_n$ et $h = \Delta t$, on déduit de (4.2) que la solution continue $\hat{\mathbf{u}}$ de (P) vérifie

$$\frac{\hat{\mathbf{u}}(t_{n+1}) - \hat{\mathbf{u}}(t_n)}{\Delta t} = \mathbf{f}(t_n, \hat{\mathbf{u}}(t_n)) + \mathcal{O}(\Delta t).$$

L'approximation a lieu quand on « oublie » le terme d'erreur, ce qui permet de construire la suite (\mathbf{u}_n) par récurrence

$$\frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\Delta t} = \mathbf{f}(t_n, \mathbf{u}_n) \iff \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \mathbf{f}(t_n, \mathbf{u}_n).$$

Cette méthode est appelée **schéma d'Euler explicite** :

- Comme $t_1 = t_*$, on part de la donnée de Cauchy $\mathbf{u}_1 = \hat{\mathbf{u}}(t_*) = \mathbf{u}_*$.
- C'est une méthode **explicite** : connaissant \mathbf{u}_n , la formule permet de calculer directement \mathbf{u}_{n+1} . On procède ainsi par récurrence à partir de \mathbf{u}_1 que l'on connaît.
- C'est une méthode **d'ordre 1** : $\mathbf{u}_n = \hat{\mathbf{u}}(t_n) + \mathcal{O}(\Delta t)$. L'ordre (qui correspond à la puissance de Δt dans le terme d'erreur) indique la vitesse à laquelle le schéma converge : quand on *raffine*, *i.e.* quand on choisit N de plus en plus grand, et donc Δt de plus en plus petit, la solution est de plus en plus précise.
- Toutefois, il est possible que la méthode diverge si Δt est trop grand. On dit que la méthode est **conditionnellement stable**. Il faut donc s'assurer que Δt est suffisamment petit (ce qui augmente le nombre de points) pour que tout se passe bien.

On peut également prendre dans (4.4) $t = t_{n-1}$ et $h = \Delta t$, ce qui fournit le **schéma d'Euler implicite** :

$$\frac{\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1}}{\Delta t} = \mathbf{f}(t_n, \mathbf{u}_n) \iff \mathbf{u}_n - \Delta t \mathbf{f}(t_n, \mathbf{u}_n) = \mathbf{u}_{n-1}.$$

On constate que :

- C'est une méthode **implicite** : connaissant \mathbf{u}_{n-1} , la formule ne permet pas de calculer directement \mathbf{u}_n : il faut résoudre un problème généralement non linéaire pour trouver \mathbf{u}_n , ce qui est coûteux (et on ne trouve qu'une approximation $\underline{\mathbf{u}}_n$ ce qui ajoute une source d'erreur supplémentaire).
- C'est une méthode **d'ordre 1** : $\mathbf{u}_n = \hat{\mathbf{u}}(t_n) + \mathcal{O}(\Delta t)$.
- La méthode est **inconditionnellement stable** : quel que soit $\Delta t > 0$, la méthode converge.

D'autres exemples de schémas numériques.

Nom	Expression	Ordre	Explicite
Euler amélioré	$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \mathbf{f}(t_n + \frac{\Delta t}{2}, \mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{f}(t_n, \mathbf{u}_n))$	2	Oui
Heun	$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{2} [\mathbf{f}(t_n, \mathbf{u}_n) + \mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{u}_n + \Delta t \mathbf{f}(t_n, \mathbf{u}_n))]$	2	Oui
Crank-Nicholson	$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{2} [\mathbf{f}(t_n, \mathbf{u}_n) + \mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{u}_{n+1})]$	2	Non

Analyse numérique. On voit dans les exemples de schémas numériques précédents qu'il y a un équilibre entre précision et coût de calcul. Plus on veut un schéma précis, plus il est nécessaire d'avoir un ordre grand. Mais les schémas d'ordre élevés ont des expressions plus complexes qui demandent plus de calculs. De même, un schéma explicite est généralement moins coûteux qu'un schéma implicite mais il est souvent nécessaire de prendre des pas de temps plus grand en raison de stabilité conditionnelle. Tout dépend du cahier des charges associé à l'étude concernée.

5 Exercices

Exercice 5.1. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

$$\begin{cases} u'(t) = f_i(t, u(t)), \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (P_i)$$

avec

$$f_1(t, u) = tu, \quad f_2(t, u) = \frac{u}{t^2 + 1}, \quad f_3(t, u) = \frac{2}{2 + \cos u}.$$

Correction de l'Exercice 5.1.

Étude de (P_1) . D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (version locale : Th. 2.1), une telle équation admet une solution maximale unique car $f_1 : (t, u) \mapsto tu$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 . Comme $f_1(\cdot, 0) = 0$, alors $u \equiv 0$ est l'unique solution maximale associée à la donnée $u_0 = 0$, définie sur \mathbb{R} , et si on suppose que u ne s'annule pas en un point, alors u ne s'annulera jamais, par unicité de la solution maximale. Ainsi, supposons $u_0 \neq 0$ (par suite $u(t) \neq 0, t \in \mathbb{R}$). On a alors

$$u'(t) = u(t)t \implies \frac{u'(t)}{u(t)} = t \implies (\ln |u(t)|)' = t \implies \ln \frac{|u(t)|}{|u(0)|} = \frac{t^2}{2} \implies |u(t)| = |u_0| e^{t^2/2}$$

et comme u_0 et $u(t)$ sont de même signe, on en déduit (voir FIG. 1a)

$$u(t) = u_0 e^{t^2/2}.$$

Étude de (P_2) . D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (version globale : Th. 2.2), une telle équation admet une unique solution définie sur \mathbb{R} car $f_2 : (t, u) \mapsto u/(1+t^2)$ est uniformément lipschitzienne par rapport à la variable d'espace. Comme $f_2(\cdot, 0) = 0$, alors $u \equiv 0$ est l'unique solution maximale associée à la donnée $u_0 = 0$, définie sur \mathbb{R} , et si on suppose que u ne s'annule pas en un point, alors u ne s'annulera jamais, par unicité de la solution maximale. Ainsi, supposons $u_0 \neq 0$ (par suite $u(t) \neq 0, t \in \mathbb{R}$). On a alors

$$\frac{u'(t)}{u(t)} = \frac{1}{1+t^2} \implies (\ln |u(t)|)' = \frac{1}{1+t^2} \implies \ln \frac{|u(t)|}{|u(0)|} = \arctan(t) \implies |u(t)| = |u_0| e^{\arctan(t)}$$

et comme u_0 et $u(t)$ sont de même signe, on en déduit (voir FIG. 1b) :

$$u(t) = u_0 e^{\arctan(t)}.$$

Étude de (P_3) . La fonction $f_3 : (t, u) \mapsto 2/(2 + \cos(u))$ est uniformément lipschitzienne par rapport à sa variable d'espace et on en déduit que pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$, la solution maximale associée à cette donnée est définie sur \mathbb{R} et de classe \mathcal{C}^1 . Essayons de résoudre l'EDO; on obtient immédiatement

$$2u'(t) + u'(t)\cos(u(t)) = 2 \implies u(t) - \frac{1}{2}\sin(u(t)) = t + u_0.$$

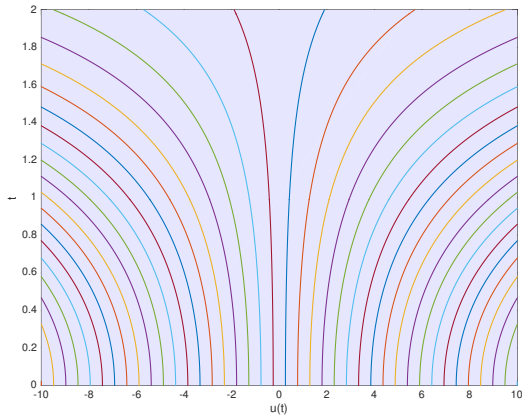
La question de la solvabilité de cette EDO peut être résolue par le théorème d'inversion globale :

Théorème 5.1 (inversion globale). Soit \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R} . Soit $\mathcal{F} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^k . On suppose que \mathcal{F} est injective et que $\mathcal{F}'(u) \neq 0$, pour tout $u \in \mathcal{U}$. Alors $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ est un ouvert \mathbb{R} et \mathcal{F} est un \mathcal{C}^k -difféomorphisme de \mathcal{U} sur $\mathcal{F}(\mathcal{U})$.

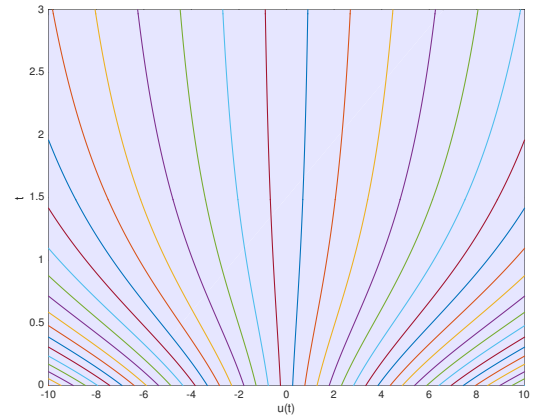
Ce théorème s'applique ici en utilisant $\mathcal{F}_{u_0} := u \mapsto u - \sin(u)/2 - u_0$ et on en déduit que \mathcal{F}_{u_0} est un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme de \mathbb{R} sur \mathbb{R} . Par suite, l'application $t \mapsto u(t) := \mathcal{F}_{u_0}^{-1}(t)$ est définie sur \mathbb{R} et elle est de classe \mathcal{C}^∞ . Numériquement, les solutions peuvent être déterminées par une méthode de type Runge-Kutta (voir FIG. 1c).

Exercice 5.2. On considère le problème de Cauchy

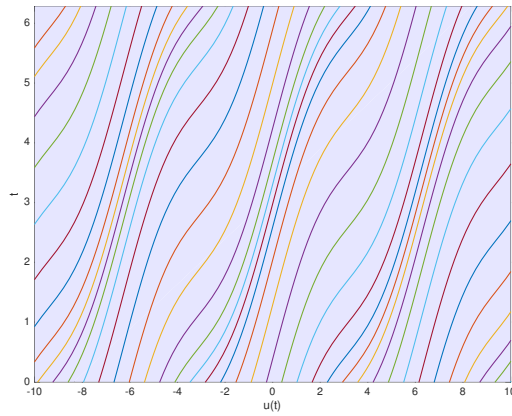
$$\begin{cases} u'(t) = tu(t)^2, \\ u(0) = u_0 \in I \subset \mathbb{R}. \end{cases}$$



(a) Solutions maximales du problème (P_1)



(b) Solutions maximales du problème (P_2)



(c) Solutions maximales du problème (P_3)

FIGURE 1: Solutions de l'exercice 5.1

- 5.1. Montrer que si $u_0 > 0$, la solution maximale est définie sur un intervalle $] -t^*, t^*[$, où t^* est un réel strictement positif que l'on exprimera en fonction de u_0 .
- 5.2. Montrer que si $u_0 < 0$, la solution maximale est globale en temps.

Correction de l'Exercice 5.2. 5.1. On suppose $u_0 \geq 0$ (voir FIG. 2a). D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème admet une solution maximale unique car $f := (t, u) \mapsto u^2 t$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 car polynomiale. Comme $f(\cdot, 0) = 0$, alors $u \equiv 0$ est une solution définie sur \mathbb{R} et si on suppose que u ne s'annule pas en un point, alors u ne s'annulera jamais, par unicité de la solution maximale. Ainsi, supposons $u_0 \neq 0$ (par suite $u(t) \neq 0$, pour tout t). On a alors

$$u'(t) = u^2(t)t \implies \frac{u'(t)}{u(t)^2} = t \implies \frac{1}{u(t)} = \frac{1}{u_0} - \frac{t^2}{2} = \frac{2 - u_0 t^2}{2u_0}.$$

Au voisinage de $t = 0$, le numérateur reste strictement positif et on obtient formellement

$$u(t) = \frac{2u_0}{2 - u_0 t^2}.$$

La solution est définie sur un intervalle $] -T^{(-)}, T^{(+)}[$ avec

$$T^{(\pm)} = \pm \sqrt{\frac{2}{u_0}}.$$

- 5.2. On suppose $u_0 \leq 0$ (voir FIG. 2b). Un raisonnement identique à celui effectué dans le cas précédent nous permet d'établir

$$\frac{1}{u(t)} = \frac{2 - u_0 t^2}{2u_0}.$$

Au voisinage de $t = 0$, le numérateur reste strictement positif et on obtient formellement

$$u(t) = \frac{2u_0}{2 - u_0 t^2}.$$

La solution est définie sur \mathbb{R} .

Exercice 5.3. On s'intéresse à la résolution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} u'(t) = u(t)^\alpha (1 - 2t), \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (C^\alpha)$$

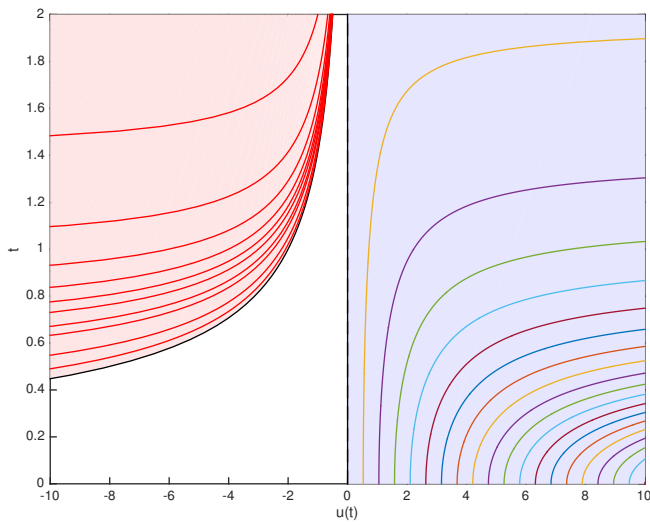
- 5.1. **Étude du cas $\alpha = 0$.** Déterminer la solution du problème $(C^{(0)})$. Montrer que deux solutions associées à deux données de Cauchy distinctes se déduisent l'une de l'autre par une transformation très simple. Dessiner les solutions pour diverses valeurs de $u_0 \in \mathbb{R}$.
- 5.2. **Étude du cas $\alpha = 1$.** Déterminer la solution du problème $(C^{(1)})$. Dessiner les solutions pour diverses valeurs de $u_0 \in \mathbb{R}$.
- 5.3. **Étude du cas $\alpha = 2$.** Déterminer la solution du problème $(C^{(2)})$. On distinguera les cas $u_0 \in [0, 4[$, $u_0 = 4$, $u_0 > 4$ et $u_0 < 0$. Dessiner les solutions associées à différentes valeurs de u_0 . On attachera un soin particulier aux cas $u_0 = -1$, $u_0 = 2$, $u_0 = 4$ et $u_0 = 6$.

Correction de l'Exercice 5.3.

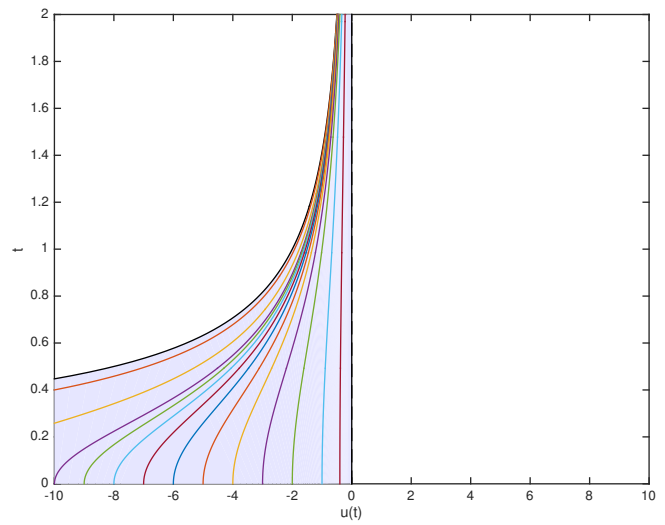
- 5.1. Pour $\alpha = 0$ (voir FIG. 3), d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (version globale), le problème admet une unique solution définie sur \mathbb{R}^2 car $f : (t, u) \mapsto 1 - 2t$ est uniformément lipschitzienne par rapport à la variable d'état. On a alors

$$u(t) = t(1 - t) + u_0.$$

Autrement dit, les solutions se déduisent les unes des autres par translation (voir FIG. 3).



(a) Solutions maximales du problème pour différentes données de Cauchy $u_0 > 0$



(b) Solutions maximales du problème pour différentes données de Cauchy $u_0 < 0$

FIGURE 2: Solutions de l'exercice 5.2

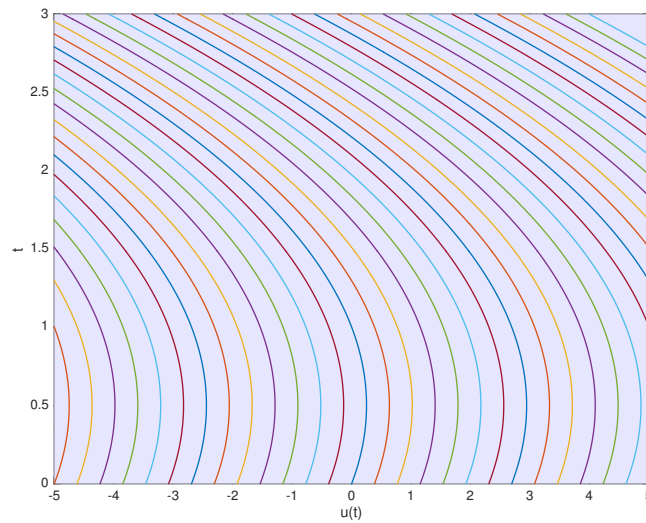


FIGURE 3: (Exercice 5.3) Solutions du problème $(C^{(0)})$

5.2. Pour $\alpha = 1$, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème admet une solution maximale unique car $f : (t, u) \mapsto u(1 - 2t)$ est localement lipschitzienne sur \mathbb{R}^2 . Comme $f(\cdot, 0) = 0$, alors $u \equiv 0$ est une solution définie sur \mathbb{R} et si on suppose que u ne s'annule pas en un point, alors u ne s'annulera jamais, par unicité de la solution maximale (voir le théorème de Cauchy-Lipschitz). Ainsi, supposons $u_0 \neq 0$ (par suite $u(t) \neq 0$, pour tout t). On a alors

$$u'(t) = u(t)(1 - 2t) \implies (\ln |u(t)|)' = 1 - 2t \implies \ln \frac{|u(t)|}{|u(0)|} = t(1 - t) \implies |u(t)| = |u_0| e^{t(1-t)},$$

et comme u_0 et $u(t)$ sont de même signe, on en déduit (voir FIG. 4)

$$u(t) = u_0 e^{t(1-t)}.$$

5.3. Pour $\alpha = 2$ (voir FIG. 5a–5c), d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème admet une solution maximale unique car $f : (t, u) \mapsto u^2(1 - 2t)$ est localement lipschitzienne sur \mathbb{R}^2 . Comme $f(\cdot, 0) = 0$, alors $u \equiv 0$ est une solution définie sur \mathbb{R} et si on suppose que u ne s'annule pas en un point, alors u ne s'annulera jamais, par unicité de la solution maximale (voir le théorème de Cauchy-Lipschitz). Ainsi, supposons $u_0 \neq 0$ (par suite $u(t) \neq 0$, pour tout t). On a alors

$$u'(t) = u^2(t)(1 - 2t) \implies -\left(\frac{1}{u(t)}\right)' = 1 - 2t \implies \frac{1}{u(t)} = \frac{1}{u_0} - t(1 - t) = \frac{1 - u_0 t(1 - t)}{u_0}.$$

Au voisinage de $t = 0$, le numérateur est strictement positif et on en déduit formellement

$$u(t) = \frac{u_0}{1 - u_0 t(1 - t)}, \quad \forall t \in [0, T_{u_0}].$$

Étudions les différents cas de figure afin de déterminer le temps maximal T_{u_0} d'existence de la solution (en particulier, même si la solution est définie pour des temps négatifs, on ne s'intéresse qu'à l'évolution de la solution pour des temps positifs) :

- Si $u_0 \in [0, 4[$, on a :

$$\forall t \geq 0, \quad 1 - 4t(1 - t) < 1 - u_0 t(1 - t) \leq 1$$

et, par suite,

$$\forall t \geq 0, \quad 0 < 1 - u_0 t(1 - t) \leq 1.$$

On en déduit que le dénominateur dans l'expression de $u(t)$ ne s'annule jamais et la solution est définie sur \mathbb{R}^+ . Notons par ailleurs que toutes les courbes ont une dérivée verticale en $t = \frac{1}{2}$ (en effet, $u'(t)$ s'annule en $t = \frac{1}{2}$); de plus, $u(+\infty) = 0$.

- Si $u_0 = 4$, la solution explose en $t = \frac{1}{2}$, qui est l'unique racine (double) du dénominateur $t \mapsto 1 - u_0 t(1 - t)$. La solution est donc définie sur $[0, \frac{1}{2}[$ avec une asymptote en $t = \frac{1}{2}$:

$$\lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}^-} u(t) = +\infty.$$

- Si $u_0 \in]4, +\infty[$, les racines du dénominateur $t \mapsto 1 - u_0 t(1 - t)$ sont

$$T_{\min} = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{u_0}} \right), \quad T_{\max} = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{u_0}} \right),$$

avec

$$0 < T_{\min} < \frac{1}{2} < T_{\max}.$$

Notons que l'intervalle $[T_{\min}, T_{\max}]$ est centré autour de $\frac{1}{2}$. La solution du problème de Cauchy est donc définie sur $[0, T_{\min}[$ et vérifie :

$$\lim_{t \rightarrow T_{\min}^-} u(t) = +\infty.$$

- Si $u_0 \in]-\infty, 0[$, alors la solution possède un unique temps d'explosion > 0 (le polynôme $t \mapsto 1 - u_0 t(1 - t)$ admet une racine > 0 et une racine < 0). Ce temps d'explosion est

$$T := \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{u_0}} \right) > 1.$$

Pour $u_0 < 0$ donné, la solution $t \mapsto u(t)$ est négative et elle est définie sur $[0, T[$ avec

$$\lim_{t \rightarrow T^-} u(t) = -\infty.$$

Conclusion : la solution du problème de Cauchy est définie (pour $t > 0$) par

$$u(t) = \frac{u_0}{1 - u_0 t(1 - t)}, \quad \forall t \in [0, T_{u_0}[,$$

avec

$$T_{u_0} := \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{u_0}} \right), & \text{si } u_0 \in]-\infty, 0[, \\ +\infty, & \text{si } u_0 \in [0, 4[, \\ \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{u_0}} \right), & \text{si } u_0 \in [4, +\infty[. \end{cases}$$

Exercice 5.4. On considère le système différentiel :

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) - x^3(t), \\ y'(t) = x(t) - y^7(t), \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

- 5.1. Montrer que ce système admet une unique solution maximale. Cette solution est-elle locale ? globale ?
- 5.2. Montrer que $(0, 0)$ est un point d'équilibre du système. Est-il stable ?
- 5.3. Reprendre les arguments de la question précédente pour montrer que les solutions maximales du système non linéaire sont globales en temps.

Correction de l'Exercice 5.4.

- 5.1. Le système admet une unique solution maximale par le théorème de Cauchy-Lipschitz, en raison du caractère polynomial de la fonction vectorielle associée au système. Cette solution est a priori locale car on ne dispose pas du caractère uniformément lipschitzien de la fonction vectorielle. Néanmoins nous montrerons, en question 3., qu'elle est globale en temps car bornée (par application du critère d'explosion en temps fini).
- 5.2. $(0, 0)$ est un point d'équilibre du système et le calcul de la matrice jacobienne et de ses valeurs propres $\{\pm i\}$ ne permet pas de conclure sur la stabilité de ce point d'équilibre. En revanche, la fonctionnelle

$$\mathcal{L} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \end{cases}$$

constitue une fonctionnelle de Lyapunov du système, ce qui permet de montrer que $(0, 0)$ est un point d'équilibre stable.

- 5.3. Reprenons les outils de la question précédente. La fonctionnelle de Lyapunov décroît le long des trajectoires, ce qui assure que :

$$x^2(t) + y^2(t) \leq x_0^2 + y_0^2.$$

Autrement dit, pour tout temps t , la solution $(x(t), y(t))$ reste dans la boule de centre $(0, 0)$ et de rayon $R_0 := \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. La solution reste bornée ; elle est donc globale en temps.

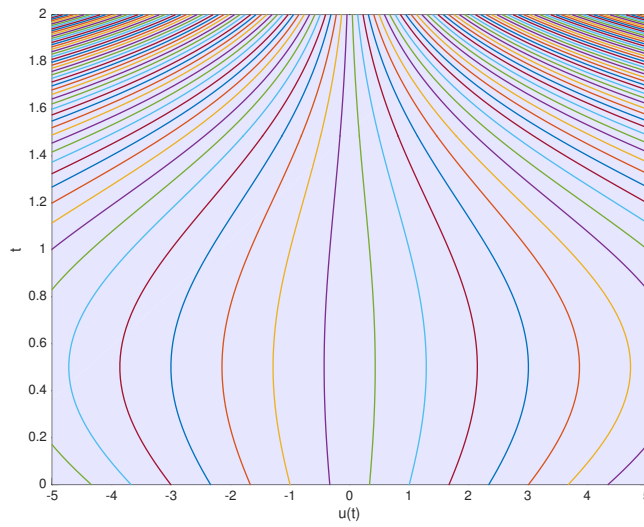
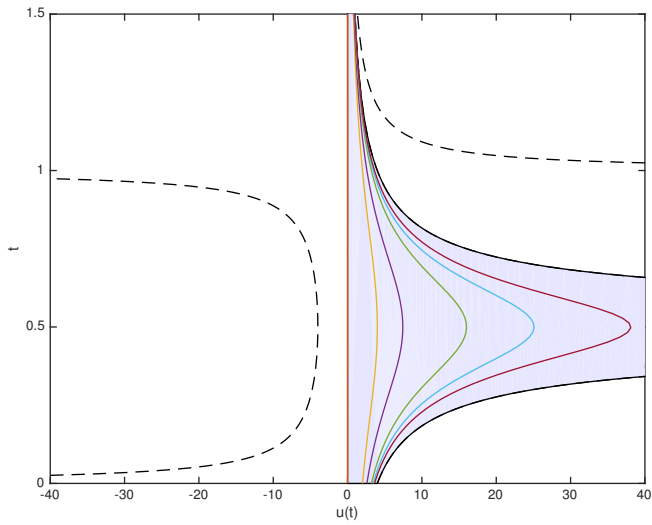
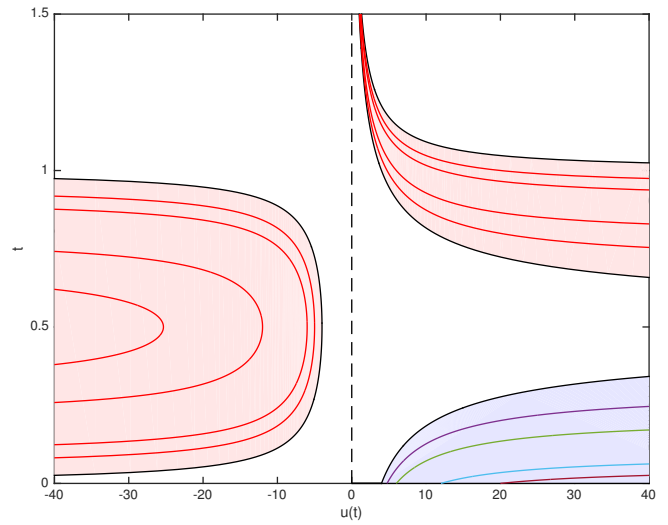


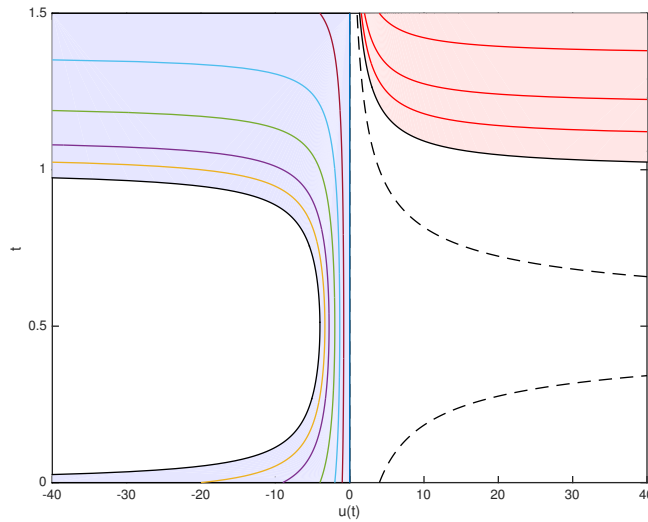
FIGURE 4: (Exercice 5.3) Solutions du problème ($C^{(1)}$)



(a) Solutions de $(C^{(2)})$ pour $u_0 \in [0, 4[$



(b) Solutions de $(C^{(2)})$ pour $u_0 \geq 4$



(c) Solutions de $(C^{(2)})$ pour $u_0 < 0$

FIGURE 5: Solutions de l'exercice 5.3