

## Corrigé de la seconde session

**Exercice 1** On considère le demi-disque  $\mathcal{D} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_1 \leq x_2\}$  représenté sur la figure 1. On introduit également la fonction  $f(x_1, x_2) = x_1^3 \exp(x_1 x_2)$ .

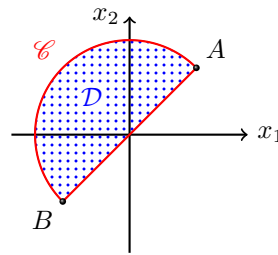


FIGURE 1 – Ex. 1 : domaine  $\mathcal{D}$  (en pointillés) de frontière  $\mathcal{C}$  (en rouge)

- 1.1. Les coordonnées cartésiennes des points  $A$  et  $B$  vérifient  $x_1^2 + x_2^2 = 1$  et  $x_1 = x_2$ . On en déduit  $A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  et  $B = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ . Les coordonnées polaires sont  $A (r = 1, \theta = \frac{\pi}{4})$  et  $B (r = 1, \theta = \frac{5\pi}{4})$ .
- 1.2. Le domaine  $\mathcal{D}$  correspond à l'ensemble  $\{(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] : r \leq 1, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}\}$ .
- 1.3. Le contour  $\mathcal{C}$  est décomposé en deux parties :
- Le segment  $[AB]$  que l'on paramètre par  $\{\bar{x}_1(t) = t, \bar{x}_2(t) = t, t \in [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]\}$ ;
  - Le demi-cercle supérieur que l'on paramètre par  $\{\hat{x}_1(t) = \cos t, \hat{x}_2(t) = \sin t, t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]\}$ .
- 1.4. (a) L'aire du demi-disque  $\mathcal{D}$  vaut  $\frac{\pi}{2}$  (car le rayon est 1).  
 (b) L'aire du domaine  $\mathcal{D}$  peut s'exprimer à l'aide de l'intégrale

$$|\mathcal{D}| = \iint_{\mathcal{D}} dx_1 dx_2.$$

Par le théorème de changement de variables (en coordonnées polaires) et compte-tenu de la question 1.2, on a :

$$|\mathcal{D}| = \iint_{[0,1] \times [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]} r dr d\theta$$

En appliquant le théorème de Fubini, on obtient :

$$|\mathcal{D}| = \left(\int_0^1 r dr\right) \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} d\theta\right) = \frac{\pi}{2}.$$

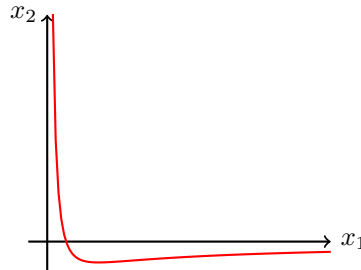
- (c) Pour calculer les coordonnées du centre d'inertie  $I$ , on applique les mêmes méthodes :

$$\iint_{\mathcal{D}} x_1 dx_1 dx_2 = \left(\int_0^1 r^2 dr\right) \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos \theta d\theta\right) = \frac{-\sqrt{2}}{3} = -\iint_{\mathcal{D}} x_2 dx_1 dx_2.$$

D'où :  $x_1^I = -x_2^I = \frac{-2\sqrt{2}}{3\pi}$ .

- 1.5. (a) On a, pour tout  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \exp(x_1 x_2) \begin{pmatrix} 3x_1^2 + x_2 x_1^3 \\ x_1^4 \end{pmatrix}$ .
- (b)  $\mathbf{U}$  est un champ de gradient défini sur tout le domaine  $\mathcal{D}$  sans trou. Sa circulation le long de toute courbe fermée est alors nulle. On en déduit que la circulation de  $\mathbf{U}$  le long de  $\mathcal{C}$  est égale à 0.
- (c) On a  $\Delta f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = (6x_1 + x_1^5 + 6x_1^2 x_2 + x_1^3 x_2^2) \exp(x_1 x_2)$ .

- 1.6. (a)  $f$  est une fonction dont les dérivées partielles sont continues. On vérifie que  $f(1,0) = 1$  donc la ligne de niveau 1 de la fonction  $f$  est non vide. De plus, on a  $\frac{\partial f}{\partial x_2}(1,1) = 1 \neq 0$ . D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un intervalle  $J \subset \mathbb{R}$  contenant  $\{1\}$  et une fonction  $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$  tels que :  $\forall x \in J, f(x, \varphi(x)) = 1$ , ce qui assure que la ligne de niveau n'est pas réduite à un seul point.
- (b) La ligne de niveau 1 de la fonction  $f$  correspond aux points  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $f(x_1, x_2) = x_1^3 \exp(x_1 x_2) = 1$ . Nécessairement,  $x_1 > 0$ . On en déduit que  $J = \mathbb{R}_+^*$  et  $\varphi(x_1) = \frac{-3}{x_1} \ln x_1$ .

FIGURE 2 – Ex. 1 : tracé de la fonction implicite  $\varphi$ 

**Exercice 2** Soit  $\mathbf{U}$  le champ de vecteurs défini sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{pmatrix} x_1 x_2^2 \\ x_1^2 x_2 \end{pmatrix}.$$

2.1. On a :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{U}(x_1, x_2) &= \frac{\partial U_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \frac{\partial U_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) = x_2^2 + x_1^2, \\ \nabla \wedge \mathbf{U}(x_1, x_2) &= \frac{\partial U_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) - \frac{\partial U_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 2x_1 x_2 - 2x_1 x_2 = 0. \end{aligned}$$

2.2. Le champ  $\mathbf{U}$  est à rotationnel nul sur le domaine sans trou  $\mathbb{R}^2$ . D'après le théorème de Poincaré, c'est un champ de gradient : il existe donc  $f$  telle que  $\mathbf{U} = \nabla f$ . On a donc  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = U_1(x_1, x_2) = x_1 x_2^2$ , d'où, en intégrant par rapport à  $x_1$ ,  $f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 x_2^2}{2} + \psi(x_2)$ . En dérivant cette expression par rapport à  $x_2$ , il vient  $x_1^2 x_2 + \psi'(x_2) = U_2(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$ . D'où  $\psi'(x_2) = 0$  et  $f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 x_2^2}{2} + c$ , où  $c$  est une constante réelle.

**Exercice 3** On considère la courbe  $\mathcal{C}$  paramétrée par :

$$\begin{cases} t \mapsto \mathbf{M}(t), \\ t \in [0, 2\pi], \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \bar{x}_1(t) = 2 \cos t + \cos(2t), \\ \bar{x}_2(t) = 2 \sin t - \sin(2t), \end{cases}$$

et représentée sur la figure 3.

3.1. On remarque que  $\bar{x}_1(2\pi - t) = \bar{x}_1(t)$  et  $\bar{x}_2(2\pi - t) = -\bar{x}_2(t)$ , ce qui montre une symétrie d'axe  $(Ox_1)$ . On se contente donc de l'étude sur  $[0, \pi]$ .

Par ailleurs, les fonctions  $\bar{x}_1$  et  $\bar{x}_2$  sont dérivables sur  $[0, 2\pi]$ , avec  $\bar{x}_1'(t) = -2[\sin t + \sin(2t)]$  et  $\bar{x}_2'(t) = 2[\cos t - \cos(2t)]$ .

Réolvons l'équation  $\bar{x}_1'(t) = 0 \iff (t = 0)$  ou  $(t = \pi)$  ou  $(\sin(2t) = -\sin t)$ . Ce dernier cas s'écrit  $2 \cos t = -1$ , soit  $t = \frac{2\pi}{3}$  ou  $t = \frac{4\pi}{3}$ .

On s'intéresse ensuite à l'équation  $\bar{x}_2'(t) = 0$ , soit  $2 \cos^2 t - \cos t - 1 = 0$ . Les racines du polynôme  $2X^2 - X - 1$  sont 1 et  $-\frac{1}{2}$ . D'où  $t = 0$ ,  $t = \frac{2\pi}{3}$  ou  $t = \frac{4\pi}{3}$ .

Le tableau de variations est donné sur la figure 4.

3.2. La continuité des fonctions  $\bar{x}_1$  et  $\bar{x}_2$  assure la continuité de la courbe. De plus, on a  $\mathbf{M}(0) = \mathbf{M}(2\pi)$ , ce qui montre que la courbe est fermée.

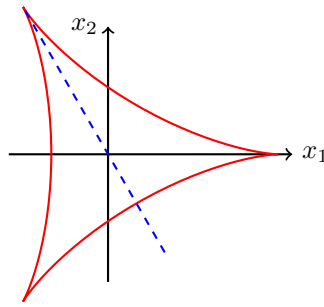


FIGURE 3 – Ex. 3 : courbe  $\mathcal{C}$  (en rouge) et sa tangente en  $t = \frac{2\pi}{3}$  (en bleu)

$t$	0		$\frac{2\pi}{3}$		$\pi$
$\bar{x}'_1(t)$	0	-	0	+	0
$\bar{x}_1$	3		$-\frac{3}{2}$		-1
$\bar{x}_2$	0		$\frac{3\sqrt{3}}{2}$		0
$\bar{x}'_2(t)$	0	+	0	-	
$\frac{\bar{x}'_2(t)}{\bar{x}'_1(t)}$	0	-		-	

FIGURE 4 – Ex. 3 : tableau de variations du paramétrage de  $\mathcal{C}$

3.3. Les points stationnaires vérifient  $\mathbf{M}'(t_0) = 0$ . Les points stationnaires sont donc  $\mathbf{M}(0) = \mathbf{M}(2\pi)$ ,  $\mathbf{M}(\frac{2\pi}{3})$  et  $\mathbf{M}(\frac{4\pi}{3})$ .

3.4. Le point  $\mathbf{M}(\frac{2\pi}{3})$  est un point stationnaire (point de rebroussement de première espèce). Le coefficient directeur de la demi-tangente est donnée par :

$$\lim_{t \rightarrow \frac{2\pi}{3}} \frac{\bar{x}'_2(t)}{\bar{x}'_1(t)} = \lim_{t \rightarrow \frac{2\pi}{3}} \frac{\bar{x}''_2(t)}{\bar{x}''_1(t)} = \lim_{t \rightarrow \frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t - 2 \sin(2t)}{\cos t + 2 \cos(2t)} = -\sqrt{3}$$

d'après la règle de l'Hôpital. L'équation cartésienne de la droite est donc

$$x_2 = -\sqrt{3} \left[ x_1 - \bar{x}_1 \left( \frac{2\pi}{3} \right) \right] + \bar{x}_2 \left( \frac{2\pi}{3} \right) = -\sqrt{3}x_1.$$

3.5. Commençons par évaluer la norme du vecteur vitesse :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{M}'(t)\| &= \sqrt{\bar{x}'_1(t)^2 + \bar{x}'_2(t)^2} = 2 \left[ \sin^2 t + \sin^2(2t) + 2 \sin t \sin(2t) + \cos^2 t + \cos^2(2t) - 2 \cos t \cos(2t) \right]^{1/2} \\ &= 2\sqrt{2 - 2 \cos(3t)} = 4 \left| \sin \left( \frac{3t}{2} \right) \right|, \end{aligned}$$

où on a utilisé successivement les formules :  $\cos^2 t + \sin^2 t = \cos^2(2t) + \sin^2(2t) = 1$ ,  $\cos t \cos(2t) - \sin t \sin(2t) = \cos(2t + t) = \cos(3t)$  et  $1 - \cos(3t) = 2 \sin^2(\frac{3t}{2})$ .

D'où la longueur de la courbe  $\mathcal{C}$  est donnée, en tenant compte de la symétrie, par :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \|\mathbf{M}'(t)\| dt &= 2 \int_0^{\pi} \|\mathbf{M}'(t)\| dt = 8 \int_0^{\pi} \left| \sin\left(\frac{3t}{2}\right) \right| dt \\ &= 8 \left[ \int_0^{2\pi/3} \sin\left(\frac{3t}{2}\right) dt - \int_{2\pi/3}^{\pi} \sin\left(\frac{3t}{2}\right) dt \right] \\ &= 8 \left[ \frac{-2}{3} \cos\left(\frac{3t}{2}\right) \right]_0^{2\pi/3} - 8 \left[ \frac{-2}{3} \cos\left(\frac{3t}{2}\right) \right]_{2\pi/3}^{\pi} = 16.\end{aligned}$$