Corrigé de la première session

1 Une courbe paramétrée

Dans le repère orthonormé $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$, on considère la courbe $\mathscr{C}$ paramétrée par

$$x(t) = \frac{3t}{1+t^3}, \qquad y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3}, \qquad t \in [0, +\infty[.$$

On introduit également la fonction scalaire sur $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

1.1. f est une fonction polynomiale donc admettant des dérivées partielles continues à tous les ordres. On a :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3(x^2 - y) \\ 3(y^2 - x) \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

1.2. Le paramétrage $t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ avec $x'(t) = 3\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}$ et $y'(t) = 3t\frac{2-t^3}{(1+t^3)^2}$.

t	0		$2^{-1/3}$		$2^{1/3}$		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$		$-$	
x	0	$\nearrow$	$2^{2/3}$	$\searrow$		$\searrow$	0
y	0	$\nearrow$		$\nearrow$	$2^{2/3}$	$\searrow$	0
$y'(t)$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{y'(t)}{x'(t)}$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Figure 1 – Problème : tableau de variations du paramétrage de $\mathscr{C}$

1.3. À $t = 0$, la courbe part de $(0,0)$ puis effectue une boucle et, pour $t \to +\infty$, tend de nouveau vers $(0,0)$. Ainsi, tout voisinage de $(0,0)$ coupe la courbe $\mathscr{C}$ deux fois. Le reste de la courbe étant continue, on déduit qu'elle est bien fermée.

1.4. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$f\big(x(t), y(t)\big) = \left(\frac{3t}{1+t^3}\right)^3 + \left(\frac{3t^2}{1+t^3}\right)^3 - \frac{27t^3}{(1+t^3)^2} = \frac{27t^3}{(1+t^3)^3}\left[1 + t^3 - (1+t^3)\right] = 0.$$

Ainsi, tout point $\mathbf{M}(t)$ est situé sur la ligne de niveau 0 de la fonction f.

1.5. Il est évident que, la courbe faisant une boucle, elle ne peut être la courbe représentative d'une fonction φ dans son intégralité. On peut toutefois la décomposer en deux courbes.

On a vu que la courbe $\mathscr{C}$ correspondait avec une ligne de niveau de la fonction f. On peut alors appliquer le théorème des fonctions implicites en tout point (x_0, y_0) tel que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. On cherche donc $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ qui vérifie $x_0^3 + y_0^3 - 3x_0y_0 = 0$ et $y_0^2 \neq x_0$. Si on avait $x_0 = y_0^2$, alors on aurait $y_0^6 + y_0^3 - 3y_0^3 = 0$, soit $y_0 = 0$

ou $y_0 = 2^{1/3}$. Ainsi, au voisinage de tout point de la courbe distinct de $O = (0,0)$ et $B = (2^{2/3}, 2^{1/3})$, on peut décrire $\mathscr{C}$ comme la courbe représentative d'une fonction $y = \varphi(x)$.

À noter qu'au voisinage de $(2^{2/3}, 2^{1/3})$, on parvient à la même conclusion avec l'existence d'une fonction ψ telle que $\mathscr{C}$ correspond à la courbe $x = \psi(y)$.

1.6. On vérifie que $A = \mathbf{M}(1)$.

1.7. On sait qu'un vecteur tangent à la courbe paramétrée par $t \mapsto \mathbf{M}(t)$ est $\mathbf{M}'(t)$. Ainsi, un point $\mathbf{N}$ appartient à la tangente en $A = \mathbf{M}(t=1)$ à la courbe $\mathscr{C}$ ssi $\overrightarrow{A\mathbf{N}}$ est colinéaire à $\mathbf{M}'(t=1)$, c'est-à-dire s'il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que

$$\overrightarrow{A\mathbf{N}} = s\mathbf{M}'(1) \iff \begin{cases} x_N - x_A = sx'(1) \\ y_N - y_A = sy'(1) \end{cases} \iff \begin{cases} x_N(s) = \frac{3}{2} - \frac{3s}{4} \\ y_N(s) = \frac{3}{2} + \frac{3s}{4} \end{cases}$$

Ceci représente une équation paramétrique de la tangente en A à $\mathscr{C}$. Pour déterminer une équation cartésienne, on déduit de la première équation $s = \frac{4}{3}(\frac{3}{2} - x)$ puis une fois injecté dans la seconde équation $y = 3 - x$.

1.8. D'après le tableau de variations, la courbe admet des tangentes verticales en O ($t \to +\infty$) et en B ($t = 2^{-1/3}$) et des tangentes horizontales en O ($t = 0$) et en $C = (2^{1/3}, 2^{2/3})$ pour $t = 2^{1/3}$. En tenant compte des différents points (O, A) et des tangentes, ainsi que des variations du tableau de la figure 1, on obtient la courbe de la figure 2.

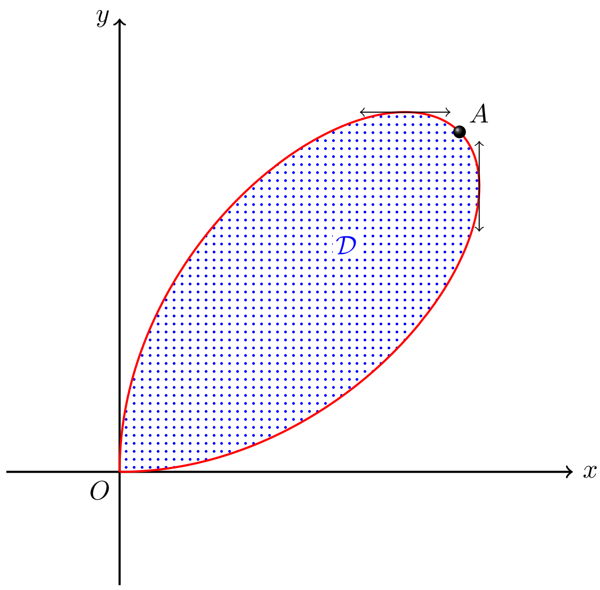

Figure 2 – Ébauche de la courbe de $\mathscr{C}$

1.9. $\mathcal{D}$ étant le domaine borné délimité par la courbe $\mathscr{C}$ (parcourue dans le sens direct par le paramétrage $t \mapsto \mathbf{M}(t)$), on peut calculer son aire à l'aide du théorème de Green-Riemann qui donne, pour tout vecteur $\mathbf{U}$ tel que $\nabla \wedge \mathbf{U} = 1$:

$$|\mathcal{D}| = \iint_{\mathcal{D}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{\mathscr{C}} \mathbf{U} \cdot \mathrm{d}\mathbf{M}.$$

Prenons par exemple $\mathbf{U}(x,y) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$. Alors

$$|\mathcal{D}| = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \left[x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\right] \mathrm{d}t = \frac{9}{2}\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^3)^2}\,\mathrm{d}t \overset{(u=t^3)}{=} \frac{3}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u)^2} = \frac{3}{2}\left[\frac{-1}{1+u}\right]_0^{+\infty} = \frac{3}{2}.$$

2 Un champ de vecteurs

On considère le champ $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \dfrac{-x_2}{x_1^2+x_2^2} \\ \dfrac{x_1}{x_1^2+x_2^2} \end{pmatrix}$.

2.1. Le rotationnel de $\mathbf{U}$ vaut :

$$\nabla \wedge \mathbf{U} = \frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1}{\partial x_2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2} + \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)^2} = 0.$$

2.2. Le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1 peut être paramétré par $x_1(t) = \cos t$ et $x_2(t) = \sin t$ pour $t \in [0, 2\pi]$. On a alors :

$$\oint_{\mathscr{C}} \mathbf{U} \cdot \mathrm{d}\mathbf{M} = \int_0^{2\pi} [-U_1(\cos t, \sin t)\sin t + U_2(\cos t, \sin t)\cos t]\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} [\sin^2 t + \cos^2 t]\,\mathrm{d}t = 2\pi.$$

2.3. Comme $\mathbf{U}$ est à rotationnel nul (voir question 2.1), on serait tenté d'appliquer le théorème de Poincaré pour conclure au fait que $\mathbf{U}$ est un champ de gradient. Toutefois, une des hypothèses du théorème n'est pas satisfaite ici : le domaine de définition de $\mathbf{U}$ n'est pas sans trou (puisque le point $(0,0)$ est exclu). Toutefois, on peut vérifier que $\mathbf{U} = \nabla\varphi$ pour $\varphi(x_1, x_2) = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$ pour $(x_1, x_2) \neq (0,0)$.

Dans la question 2.2, on retrouve le problème lié au domaine avec trou puisque la circulation de $\mathbf{U}$ le long d'un contour fermé est non nul : cela vient du fait que le contour fermé entoure le point $(0,0)$.

3 Des fonctions particulières

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. *On considère une fonction scalaire* f *admettant des dérivées partielles sur* $\Omega = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ *et les deux affirmations suivantes :*

$$\forall\, (x,y) \in \Omega, \forall\, t > 0,\ f(tx, ty) = t^\alpha f(x,y); \tag{H}$$

$$\forall\, (x,y) \in \Omega,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y). \tag{H'}$$

3.1. Soit f une fonction vérifiant (H). Posons alors $F(t,x,y) = f(tx,ty) - t^\alpha f(x,y)$. Par hypothèse, $F(t,x,y) = 0$ pour tout $(t,x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \Omega$. De plus, F admet des dérivées partielles par rapport aux 3 variables et :

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x,y) = 0 = x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty) - \alpha t^{\alpha-1} f(x,y).$$

En prenant $t = 1$, on déduit que f vérifie (H').

3.2. Soit f une fonction vérifiant (H'). Pour $X = (\widetilde{x}, \widetilde{y}) \in \Omega$ fixé, on définit la fonction $G_X(t) = \frac{1}{t^\alpha} f(t\widetilde{x}, t\widetilde{y})$. G_X est dérivable par rapport à t avec :

$$G_X'(t) = \frac{t^\alpha \left[\widetilde{x}\frac{\partial f}{\partial x}(t\widetilde{x}, t\widetilde{y}) + \widetilde{y}\frac{\partial f}{\partial y}(t\widetilde{x}, t\widetilde{y})\right] - \alpha t^{\alpha-1} f(t\widetilde{x}, t\widetilde{y})}{t^{2\alpha}} = \frac{t\widetilde{x}\frac{\partial f}{\partial x}(t\widetilde{x}, t\widetilde{y}) + t\widetilde{y}\frac{\partial f}{\partial y}(t\widetilde{x}, t\widetilde{y}) - \alpha f(t\widetilde{x}, t\widetilde{y})}{t^\alpha} = 0$$

en appliquant (H') en $(x,y) = (t\widetilde{x}, t\widetilde{y})$. On en déduit que la fonction G_X est une fonction constante. En particulier, pour tout $t > 0$, on a $G_X(t) = G_X(1)$, ce qui équivaut à (H).