

Corrigé de la première session

1 Exercice préliminaire

On introduit la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx.$$

- 1.1. Les primitives respectives de $x \mapsto 1$, $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \cos^2 x = \frac{\cos(2x)+1}{2}$ sont $x \mapsto x$, $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \frac{\sin(2x)+2x}{4}$.
D'où :

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = 1 \quad \text{et} \quad I_2 = \frac{\pi}{4}.$$

- 1.2. Posons $y = \frac{\pi}{2} - x$. En effectuant le changement de variables, on obtient :

$$I_n = - \int_{\pi/2}^0 \cos^n \left(\frac{\pi}{2} - y \right) dy = \int_0^{\pi/2} \sin^n y \, dy.$$

- 1.3. En remarquant que $\cos^{n+2} x = \cos x \times \cos^{n+1} x$, on intègre I_{n+2} par parties :

$$I_{n+2} = [\sin x \times \cos^{n+1} x]_0^{\pi/2} + (n+1) \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin^2 x}_{=1-\cos^2 x} \times \cos^n x \, dx = (n+1)(I_n - I_{n+2}).$$

On en déduit :

$$\forall n \geq 0, \quad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

- 1.4. En utilisant la formule précédente pour $n = 2$ puis $n = 4$, on obtient :

$$I_4 = \frac{3}{4} \times \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{16} \quad \text{puis} \quad I_6 = \frac{5}{6} \times \frac{3\pi}{16} = \frac{5\pi}{32}.$$

2 Problème

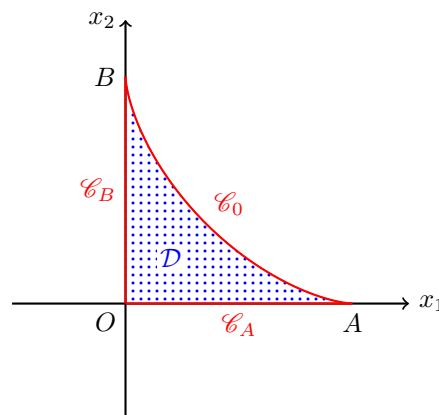


FIGURE 1 – Problème : domaine D de frontière \mathcal{C}

- 2.1. Les fonctions x_1 et x_2 sont continues sur I avec :

$$x_1'(t) = -3 \sin x \times \cos^2 x \leq 0 \quad \text{et} \quad x_2'(t) = 3 \cos x \times \sin^2 x \geq 0.$$

On obtient ainsi le tableau de la figure 2. On remarque que la pente de la tangente est donnée par :

$$\frac{x_2'(t)}{x_1'(t)} = -\tan x.$$

t	0		$\pi/2$
$x'_1(t)$	0	–	0
x_1	1		0
x_2	0		1
$x'_2(t)$	0	+	0
$\frac{x'_2(t)}{x'_1(t)}$		–	

FIGURE 2 – Problème : tableau de variations du paramétrage de \mathcal{C}_0

On a donc une tangente horizontale en $t = 0$ et une tangente verticale en $t = \frac{\pi}{2}$ comme le montre la figure. La courbe \mathcal{C}_0 est parcourue de $A = \mathbf{M}(0) = (1, 0)$ vers $B = \mathbf{M}(\frac{\pi}{2}) = (0, 1)$.

- 2.2. On paramètre le bord \mathcal{C}_0 par $\{\mathbf{M}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t), t \in I\}$, le bord \mathcal{C}_A par $\{\mathbf{M}_A(t) = (t, 0), t \in [0, 1]\}$ et le bord \mathcal{C}_B par $\{\mathbf{M}_B(t) = (0, 1 - t), t \in [0, 1]\}$ de sorte que le bord de \mathcal{D} est parcouru dans le sens direct.

Évaluons tout d'abord la longueur de la courbe \mathcal{C}_0 :

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}_0| &= \int_0^{\pi/2} \|\mathbf{M}'(t)\| dt = 3 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^2 t \times \cos^4 t + \sin^4 t \times \cos^2 t} dt \\ &= 3 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^2 t \times \cos^2 t \times (\cos^2 t + \sin^2 t)} dt = 3 \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos t \times \sin t}_{\geq 0 \text{ sur } I} dt \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{\pi/2} \sin(2t) dt = -\frac{3}{4} [\cos(2t)]_0^{\pi/2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Avec $|\mathcal{C}_A| = OA = 1$ et $|\mathcal{C}_B| = OB = 1$, il vient $|\mathcal{C}| = \frac{7}{2}$.

- 2.3. Par application de la formule de Green-Riemann, pour $\mathbf{V}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix}$ qui vérifie $\nabla \wedge \mathbf{V} = 1$, on a :

$$\begin{aligned} |\mathcal{D}| &= \iint_{\mathcal{D}} dx_1 dx_2 = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{M} \\ &= \int_0^{\pi/2} \mathbf{V}(\mathbf{M}(t)) \cdot \mathbf{M}'(t) dt + \int_0^1 \mathbf{V}(\mathbf{M}_A(t)) \cdot \mathbf{M}'_A(t) dt + \int_0^1 \mathbf{V}(\mathbf{M}_B(t)) \cdot \mathbf{M}'_B(t) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} x_1(t)x'_2(t) dt = 3 \int_0^{\pi/2} \cos^4 t \times \sin^2 t dt = 3(I_4 - I_6) = \frac{3\pi}{32}. \end{aligned}$$

- 2.4. (a) On vérifie que pour tout $t \in I$, on a : $f(\mathbf{M}(t)) = 1$. Ainsi, \mathcal{C}_0 est incluse dans la ligne de niveau 1 de la fonction f .

- (b) La fonction f est continue sur $(\mathbb{R}_+)^2$ et admet des dérivées partielles sur $(\mathbb{R}_+)^2 \setminus \{(0, 0)\}$, avec :

$$\nabla f(x_1, x_2) = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} x_1^{-1/3} \\ x_2^{-1/3} \end{pmatrix}.$$

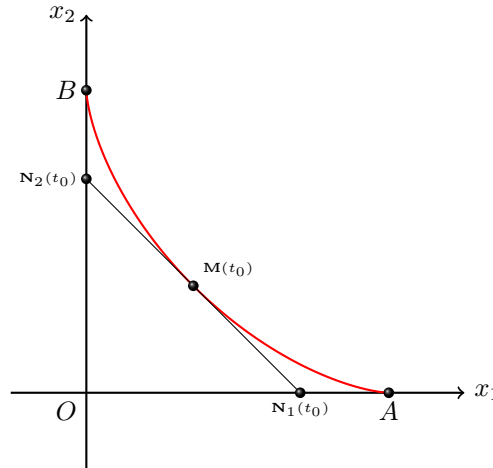
On vérifie que f n'est pas dérivable au voisinage de $(0, 0)$:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = +\infty.$$

- (c) Le gradient d'une fonction est orthogonal à toute ligne de niveau donc ∇f est orthogonal à \mathcal{C}_0 .
 (d) Soit $t_0 \in I$ fixé. Le point $\mathbf{P}(X_1, X_2)$ est sur la tangente à \mathcal{C}_0 en $\mathbf{M}(t_0)$ si et seulement si :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{PM}(t_0)} \cdot \nabla f(\mathbf{M}(t_0)) = 0 &\iff x_1(t_0)^{-1/3}(x_1(t_0) - X_1) + x_2(t_0)^{-1/3}(x_2(t_0) - X_2) = 0 \\ &\iff X_2 = x_2(t_0) + \left(\frac{x_2(t_0)}{x_1(t_0)}\right)^{1/3} (x_1(t_0) - X_1) \\ &\iff X_2 = \sin(t_0) - \tan(t_0)X_1. \end{aligned}$$

(e)



- ii. En utilisant l'équation de la droite \mathcal{T} , on détermine les points qui vérifient respectivement $X_2 = 0$ (intersection avec l'axe des abscisses) et $X_1 = 0$ (intersection avec l'axe des ordonnées) :

$$\mathbf{N}_1(t_0) = (\cos(t_0), 0) \quad \text{et} \quad \mathbf{N}_2(t_0) = (0, \sin(t_0)).$$

iii. On a :

$$\|\mathbf{N}_1(t_0)\mathbf{N}_2(t_0)\| = \sqrt{\cos^2(t_0) + \sin^2(t_0)} = 1.$$

- iv. (Bonus) Ainsi, quel que soit $t_0 \in I$, le segment $\mathbf{N}_1(t_0)\mathbf{N}_2(t_0)$ est de longueur constante. Quand t_0 varie, on peut assimiler ce segment à une échelle qui glisse le long de AO et qui est alors toujours tangente à l'astroïde.

- 2.5. (a) Le champ \mathbf{U} est défini sur le domaine \mathcal{D} , borné et sans trou. Ainsi, par le théorème de Poincaré, \mathbf{U} est un champ de gradient si et seulement si $\nabla \wedge \mathbf{U} = 0$. Or :

$$\nabla \wedge \mathbf{U}(x_1, x_2) = \frac{\partial U_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) - \frac{\partial U_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 6x_1 \neq 0.$$

D'où \mathbf{U} n'est pas un champ de gradient.

- (b) En notant $\boldsymbol{\nu}(t) = (x_2'(t), -x_1'(t))$, le flux de \mathbf{U} à travers \mathcal{C} est donné par :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma &= \int_I \mathbf{U}(\mathbf{M}(t)) \cdot \boldsymbol{\nu}(t) \, dt - \int_0^1 U_1(0, 1-t) \, dt - \int_0^1 U_2(t, 0) \, dt \\ &= \int_I [U_1(x_1(t), x_2(t))x_2'(t) - U_2(x_1(t), x_2(t))x_1'(t)] \, dt - 1 \\ &= \int_0^{\pi/2} [-2 \cos^3 t \times 3 \sin^2 t \cos t + (3 \cos^6 t - \sin^3 t) \times 3 \cos^2 t \sin t] \, dt - 1 \\ &= -6(I_4 - I_6) + 9 \int_0^{\pi/2} \cos^8 t \sin t \, dt - 3(I_4 - I_6) - 1 \\ &= -9(I_4 - I_6) + 9 \left[-\frac{\cos^9 t}{9} \right]_0^{\pi/2} - 1 = -\frac{9\pi}{32}. \end{aligned}$$

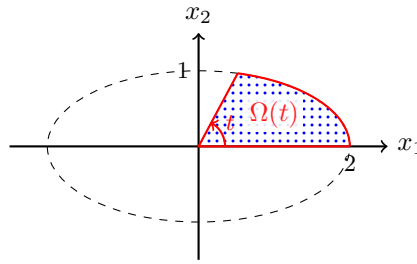


FIGURE 3 – Exercice annexe : domaine $\Omega(t)$

3 Exercice annexe

3.1. Lorsque (r, θ) décrit $[0, 1] \times [0, 2\pi]$, $\Phi(r, \theta)$ décrit l'intérieur de l'ellipse \mathcal{E} (bord inclus).

3.2. On a :

$$\text{Jac } \Phi(r, \theta) = \begin{pmatrix} 2 \cos \theta & -2r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Son déterminant vaut : $2r \cos^2 \theta + 2r \sin^2 \theta = 2r$.

3.3. En effectuant le changement de variables défini par $(x_1, x_2) = \Phi(r, \theta)$, il vient :

$$|\Omega(t)| = \iint_{\Omega(t)} dx_1 dx_2 = \iint_{[0,1] \times [0,t]} 2r \, dr \, d\theta \stackrel{(\text{Fubini})}{=} 2 \left(\int_0^1 r \, dr \right) \left(\int_0^t d\theta \right) = t.$$

3.4. Le centre d'inertie $\mathbf{M}(t)$ de $\Omega(t)$ a pour coordonnées $(x_1(t), x_2(t))$ définies par :

$$x_1(t) = \frac{1}{|\Omega(t)|} \iint_{\Omega(t)} x_1 \, dx_1 \, dx_2 \quad \text{et} \quad x_2(t) = \frac{1}{|\Omega(t)|} \iint_{\Omega(t)} x_2 \, dx_1 \, dx_2.$$

En effectuant le même changement de variables que précédemment et en appliquant le théorème de Fubini, on obtient :

$$x_1(t) = \frac{1}{t} \iint_{[0,1] \times [0,t]} 2r \cos \theta \times 2r \, dr \, d\theta = \frac{4}{t} \left(\int_0^1 r^2 \, dr \right) \left(\int_0^t \cos \theta \, d\theta \right) = \frac{4 \sin t}{3t}.$$

De même :

$$x_2(t) = \frac{1}{t} \iint_{[0,1] \times [0,t]} r \sin \theta \times 2r \, dr \, d\theta = \frac{2}{t} \left(\int_0^1 r^2 \, dr \right) \left(\int_0^t \sin \theta \, d\theta \right) = \frac{2(1 - \cos t)}{3t}.$$

3.5. (Bonus) Les fonctions x_1 et x_2 sont définies et dérivables sur $]0, 2\pi[$, avec :

$$x_1'(t) = \frac{4}{3} \frac{t \cos t - \sin t}{t^2} \quad \text{et} \quad x_2'(t) = \frac{2}{3} \frac{t \sin t - 1 + \cos t}{t^2}.$$

Posons $n_1(t) = t \cos t - \sin t$ et $n_2(t) = t \sin t - 1 + \cos t$. On a $n_1'(t) = -t \sin t$ et $n_2'(t) = t \cos t$. Cela donne le sens de variations de x_1 et x_2 :

t	0	π	α_1	2π
$n_1'(t)$		−	0	+
$x_1'(t)$	0	$-\frac{4}{3\pi}$	0	$\frac{2}{3\pi}$
$x_1(t)$	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{4}{3} \cos \alpha_1$	0

t	0	$\pi/2$	α_2	$3\pi/2$	2π		
$n'_2(t)$	0	+	0	-	-	0	+
$x'_2(t)$	0	→		←	→	0	
$x_2(t)$	0	→		←	0	0	

On a introduit $\alpha_1 \in [\pi, 2\pi]$ et $\alpha_2 \in [\pi/2, \pi]$ tels que $\alpha_1 \cos \alpha_1 = \sin \alpha_1$ et $\alpha_2 \sin \alpha_2 = 1 - \cos \alpha_2$.

