Examen

L'examen est prévu pour une durée de 2 heures. Les documents ainsi que les téléphones, calculatrices et ordinateurs sont interdits. Les 3 parties (exercice préliminaire, problème et exercice annexe) sont indépendants. Toutefois, le résultat de la question 1.3. peut être utilisé dans le problème. Tout élément de réponse sera pris en compte dans la notation.

Barême approximatif et non définitif : 3,5pts (ex. 1) / 12,5pts (ex. 2) / 4pts (ex. 3)

1 Exercice préliminaire

On introduit la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, \mathrm{d}x.$$

1.1. Calculer I_0, I_1 et I_2.

1.2. Justifier par un changement de variables que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, \mathrm{d}x$.

1.3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que la suite vérifie la relation de récurrence :

$$\forall\, n \geqslant 0,\ I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

1.4. En déduire que $I_4 = \frac{3\pi}{16}$ et $I_6 = \frac{5\pi}{32}$.

2 Problème

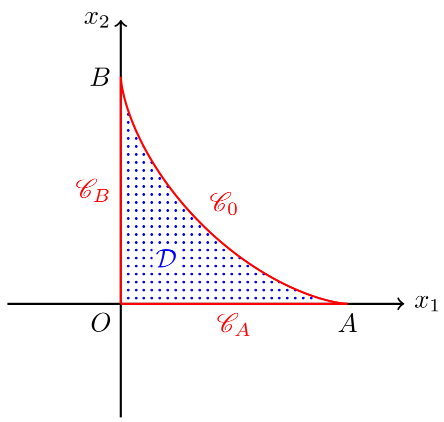

FIGURE 1 – Problème : domaine $\mathcal{D}$ de frontière $\mathscr{C}$

Sur la figure 1, le domaine $\mathcal{D}$ est délimité par la courbe $\mathscr{C} = \mathscr{C}_0 \cup \mathscr{C}_A \cup \mathscr{C}_B$ composée des segments $\mathscr{C}_A = OA$ et $\mathscr{C}_B = OB$, et de la courbe paramétrée reliant A à B définie par

$$\mathscr{C}_0 = \left\{ \mathbf{M}(t) = \big(x_1(t), x_2(t)\big) \ :\ x_1(t) = \cos^3 t,\ x_2(t) = \sin^3 t,\ t \in I = [0, \pi/2] \right\}.$$

On introduit également :

- la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ par $f(x_1, x_2) = x_1^{2/3} + x_2^{2/3}$;
- le champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ par $\mathbf{U}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ 3x_1^2 - x_2 \end{pmatrix}$.

2.1. Étudier la courbe paramétrée $\mathscr{C}_0$ et en déduire les coordonnées des points A et B.

2.2. Calculer la longueur de la courbe $\mathscr{C}$.

2.3. Quelle est la surface du domaine $\mathcal{D}$?

2.4. (a) Justifier que la courbe $\mathscr{C}_0$ est incluse dans une ligne de niveau de la fonction f.
   (b) Calculer le gradient de f.
   (c) Quelle est la position de ∇f par rapport à $\mathscr{C}_0$?
   (d) Pour $t_0 \in I$ fixé, déterminer une équation cartésienne de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathscr{C}_0$ en $\mathbf{M}(t_0)$.
   (e) On note $\mathbf{N}_1(t_0)$ et $\mathbf{N}_2(t_0)$ les points d'intersection respectifs de $\mathcal{T}$ avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
      i. Faire un dessin.
      ii. Déterminer leurs coordonnées.
      iii. Prouver que la distance $\mathbf{N}_1(t_0)\mathbf{N}_2(t_0)$ est indépendante de t_0.
      iv. (Bonus) Comment relier cette réponse au problème d'une échelle qui glisse sur le sol ?

2.5. (a) $\mathbf{U}$ est-il un champ de gradient ?
   (b) Évaluer le flux de $\mathbf{U}$ à travers $\mathscr{C}$.

3 Exercice annexe

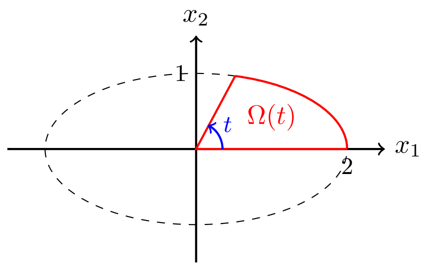

FIGURE 2 – Domaine $\Omega(t)$

On considère l'ellipse $\mathcal{E}$ (en pointillé sur la figure 2) d'équation cartésienne :

$$\frac{x_1^2}{4} + x_2^2 = 1.$$

Soit Φ l'application de coordonnées elliptiques définie sur $[0,1] \times [0, 2\pi]$ par :

$$\Phi(r, \theta) = \begin{pmatrix} 2r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Pour $t \in]0, 2\pi]$ fixé, on désigne par $\Omega(t)$ la portion d'ellipse délimitée en coordonnées elliptiques par $\theta \in [0, t]$.

3.1. Quelle est l'image de $[0,1] \times [0, 2\pi]$ par l'application Φ ?

3.2. Déterminer la jacobienne de Φ puis son déterminant.

3.3. En déduire l'aire de $\Omega(t)$.

3.4. Calculer les coordonnées $\big(x_1(t), x_2(t)\big)$ du centre d'inertie $\mathbf{M}(t)$ de $\Omega(t)$.

3.5. (Bonus) Tracer la courbe décrite par $\mathbf{M}(t)$ lorsque t varie entre 0 et 2π. *On pourra introduire* $\alpha_1 \in [\pi, 2\pi]$ *et* $\alpha_2 \in [\pi/2, \pi]$ *tels que* $\alpha_1 \cos\alpha_1 = \sin\alpha_1$ *et* $\alpha_2 \sin\alpha_2 = 1 - \cos\alpha_2$.