# Examen : autour de l'ellipse

**L'examen est prévue pour une durée de 2 heures. Les questions identifiées par des chiffres sont indépendantes les unes des autres. Tout élément de réponse sera pris en compte dans la notation. Les documents ainsi que les téléphones, calculatrices et ordinateurs sont interdits.**

Barême **approximatif et non définitif** : 1 : 0.5pt, 2 : 2pts, 3 : 2pts, 4 : 3.5pts, 5 : 5pts, 6 : 5.5pts, 7 : 7.5pts.

*On rappelle que :*

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ \cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta \quad \text{et} \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ \sin(2\alpha) = 2\cos\alpha\sin\alpha.$$

*On note $\mathcal{E}$ l'ellipse centrée en l'origine d'un repère orthonormé d'équation cartésienne*

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

*La courbe $\mathcal{E}$ peut être paramétrée par*

$$\begin{cases} x(t) = 3\cos t, \\ y(t) = 2\sin t, \end{cases} \qquad t \in (0, 2\pi).$$

*Le point de coordonnées $\big(x(t), y(t)\big)$ est noté $M(t)$.*

1. Faire un dessin dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2. (a) De quelle fonction l'ellipse $\mathcal{E}$ est-elle la ligne de niveau 0 ? *On notera $f_{\mathcal{E}}$ cette fonction.*
   (b) *Soit $P$ le point de coordonnées* $(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$. Justifier que $P$ est sur l'ellipse $\mathcal{E}$.
   (c) Déterminer une équation de la tangente à l'ellipse en $P$.
3. *On pose $t_0 = \frac{\pi}{4}$.*
   (a) Calculer les coordonnées de $M(t_0)$.
   (b) Déterminer une équation paramétrique de la tangente à $\mathcal{E}$ en $M(t_0)$.
   (c) Prouver que l'équation déterminée à la question précédente est équivalente à celle de la question 2c.
4. *On note $\mathcal{O}$ le domaine compris entre l'ellipse $\mathcal{E}$, l'axe des abscisses et la droite $(OP)$, où $P$ est le point défini à la question 2b.*
   (a) Représenter $\mathcal{O}$ sur la figure de la question 1.
   (b) Déterminer une équation cartésienne puis une équation paramétrique de la droite $(OP)$.
   (c) Calculer l'aire du domaine $\mathcal{O}$.
5. *On introduit la forme différentielle*

$$\omega_1 = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y, \qquad \textit{avec} \quad P(x,y) = \frac{-y}{4x^2+9y^2} \ \textit{et}\ Q(x,y) = \frac{x}{4x^2+9y^2}.$$

   (a) Quel est le domaine de définition de $\omega_1$ ? Est-elle une forme différentielle de degré 1, 2 ou 3 ?
   (b) Calculer $\displaystyle\int_{\mathcal{E}} \omega_1$.
   (c) Évaluer les dérivées partielles $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial P}{\partial y}$.
   (d) La forme $\omega_1$ est-elle exacte ?
   (e) Pour $\varphi(x,y) = \ln(1 + 4x^2 + 9y^2)$, calculer $\overrightarrow{U} = \operatorname{grad}\varphi$.
   (f) En notant $\omega_2$ la forme différentielle associée à $\overrightarrow{U}$, déterminer la valeur de $\displaystyle\int_{\mathcal{E}} \omega_2$.

6. (a) Au voisinage de quels points peut-on représenter l'ellipse $\mathcal{E}$ comme la courbe représentative d'une fonction $y = \psi(x)$ ?
   (b) *Soit $\mathcal{D}$ le domaine borné de $\mathbb{R}^2$ délimité par $\mathcal{E}$.* Justifier que le domaine $\mathcal{D}$ peut s'écrire :
   $$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -\alpha \leqslant x \leqslant \alpha,\ -\beta\sqrt{1-\gamma x^2} \leqslant y \leqslant \beta\sqrt{1-\gamma x^2}\right\}$$
   pour des réels $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ à préciser.
   (c) *Posons $g(x,y) = x^2$.* Calculer $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} g(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ à l'aide du théorème de Fubini.
   (d) Reprendre la question précédente en considérant le changement de variables $x = 3r\cos\theta$ et $y = 2r\sin\theta$.
7. *On appelle $\mathcal{C}$ le cône tronqué dans $\mathbb{R}^3$ d'équation*
   $$z^2 = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1, \qquad \text{(latérale)}$$
   *complété par la surface*
   $$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z = 1,\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leqslant 1\right\}. \qquad \text{(supérieure)}$$
   (a) Faire un dessin dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
   (b) Déterminer l'intersection de la face latérale de $\mathcal{C}$ avec le plan d'équation $y = 0$.
   (c) *On note $\mathcal{K}$ le domaine borné de $\mathbb{R}^3$ délimité par $\mathcal{C}$. On a donc :*
   $$\mathcal{K} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z \in [0,1],\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leqslant z^2\right\}.$$
      i. Étant donné le paramétrage suivant de la surface latérale du cône $\mathcal{C}$,
      $$\begin{cases} x(u,v) = 3u\cos v, \\ y(u,v) = 2u\sin v, \qquad (u,v) \in [0,1] \times [0, 2\pi], \\ z(u,v) = u, \end{cases}$$
      donner les coordonnées du vecteur normal unitaire $\overrightarrow{n}_{\text{lat}}(u,v)$ à la surface latérale.
      ii. Ce vecteur est-il extérieur à $\mathcal{K}$ ?
      iii. Sans calcul, déterminer les coordonnées du vecteur normal unitaire $\overrightarrow{n}_{\text{sup}}(u,v)$ à la surface supérieure.
      iv. En déduire le volume de $\mathcal{K}$.
   (d) En utilisant un changement de variables inspiré de celui de la question 6d, calculer les coordonnées du centre de gravité de $\mathcal{K}$.
   (e) En appliquant la formule de Green-Ostrogradsky, déterminer la valeur du flux à travers $\mathcal{C}$ du champ de vecteurs
   $$\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} x^3 \\ x^2 y \\ xz \end{pmatrix}.$$