

Un modèle abstrait : de la théorie aux simulations numériques

Yohan Penel¹

¹INRIA Lille - Nord Europe, EPI SIMPAF

Travaux réalisés en collaboration avec S. Dellacherie (CEA Saclay) et O. Lafitte (LAGA, Paris 13)

Séminaire **Analyse Numérique & EDP**

Orsay – 20 octobre 2011

Schéma d'étude

🐛 **Problème physique sous-jacent** : étude du comportement de bulles dans un réacteur nucléaire

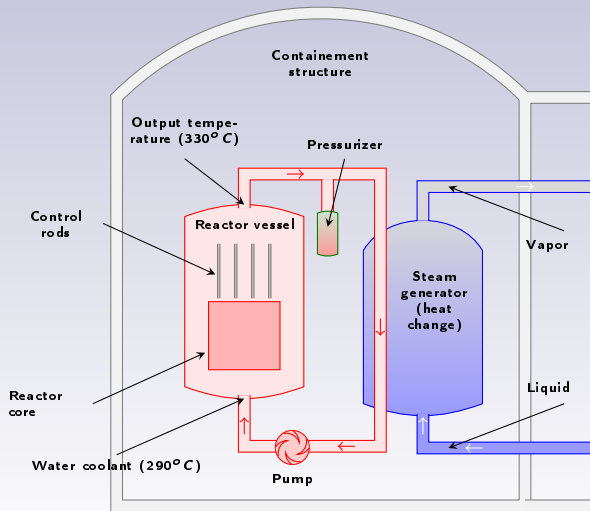
🐛 **Étapes** :

- ➡ Choix du modèle (critères physiques et pratiques)
- ➡ Preuve du **caractère bien posé** du modèle suivant la régularité des données
- ➡ Étude de la **pertinence** du modèle (propriétés physiques)
- ➡ Développement de **schémas numériques** respectant les propriétés physiques
- ➡ Simulations / Interprétations

Schéma d'étude

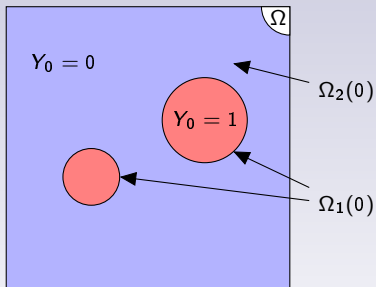
- 🐛 **Problème physique sous-jacent** : étude du comportement de bulles dans un réacteur nucléaire
- 🐛 **Étapes** :
 - ➡ **Choix** du modèle (critères physiques et pratiques)
 - ➡ Preuve du **caractère bien posé** du modèle suivant la régularité des données
 - ➡ Étude de la **pertinence** du modèle (propriétés physiques)
 - ➡ Développement de **schémas numériques** respectant les propriétés physiques
 - ➡ Simulations / Interprétations

Modélisation des bulles



Modélisation des bulles

Condition Initiale



$$Y(t = 0, x) = Y_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \Omega_1(0), \\ 0, & \text{si } x \in \Omega_2(0). \end{cases}$$

- Régularité des solutions : **régularité de la donnée initiale** Y_0
- **Interface** de la bulle : surface de **discontinuité** de Y
- Résolution de l'équation de transport sur Y : algorithme de **capture d'interface**
- À plus grande échelle : Y_0 régulière

Question : existe-t-il une solution du type $\mathbf{1}_{\Omega_1(t)}$ lorsque la donnée initiale est Y_0 ?

Plan de l'exposé

- 1 **Construction du modèle**
- 2 **Analyse du modèle ABV**
 - Données régulières
 - Une propriété algébrique
 - Étude du cas de la dimension 1
- 3 **Outils pour la simulation numérique du modèle**
 - Approches en 1D selon la régularité des données
 - Résultats en 2D

Plan de la partie

- 1 Construction du modèle
- 2 Analyse du modèle ABV
- 3 Outils pour la simulation numérique du modèle



Généalogie des modèles étudiés

Navier-Stokes

$$\begin{cases} \partial_t(\rho Y) + \nabla \cdot (\rho Y \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g}, \\ \partial_t(\rho E) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} E) = -\nabla \cdot (P \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{u}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}. \end{cases}$$

Conditions initiales et aux limites

- Domaine d'étude : Ω , **borné** dans \mathbb{R}^d ($d \in \{1, 2, 3\}$) et **lipschitzien**
- Données : $\mathbf{u}_0, Y_0, T_0, \rho_0$
- Conditions sur le bord : $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}, \nabla T \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$

Généalogie des modèles étudiés

Navier-Stokes sous forme non conservative

$$\begin{cases} D_t Y = 0, \\ \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \rho D_t \mathbf{u} = -\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g}, \\ \rho c_p D_t T = \alpha T D_t P + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \boldsymbol{\sigma} :: \nabla \mathbf{u}. \end{cases}$$

Notations :

$$D_t = \partial_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \quad ; \quad \alpha = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P \quad ; \quad c_p = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)_P - \frac{P}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P.$$

Lois d'état : $\varepsilon(Y, T, P)$, $\rho(Y, T, P)$

Linéarisation du tenseur de Cauchy : $\boldsymbol{\sigma} = \mu (\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u}) + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathcal{I}d$

Généalogie des modèles étudiés

Navier-Stokes sous forme adimensionnée

$$\left\{ \begin{array}{l} D_t Y = 0, \\ \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \rho D_t \mathbf{u} = -\frac{1}{M^2} \nabla P + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \frac{\rho}{\text{Fr}} \mathbf{e}_3, \\ \rho c_p D_t T = \beta_* \alpha T D_t P + \frac{\nabla \cdot (\kappa \nabla T)}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} + \frac{M^2}{\text{Re}} \boldsymbol{\sigma} :: \nabla \mathbf{u}, \\ P = P(t, \mathbf{x}). \end{array} \right.$$

Généalogie des modèles étudiés

Navier-Stokes sous forme adimensionnée

$$\left\{ \begin{array}{l} D_t Y = 0, \\ \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \rho D_t \mathbf{u} = -\frac{1}{M^2} \nabla P + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \frac{\rho}{\text{Fr}} \mathbf{e}_3, \\ \rho c_p D_t T = \beta_* \alpha T D_t P + \frac{\nabla \cdot (\kappa \nabla T)}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} + \frac{M^2}{\text{Re}} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u}, \\ P = P(t, \mathbf{x}), \quad \pi(t, \mathbf{x}). \end{array} \right.$$

Développement asymptotique à bas Mach : Majda & Sethian, Lions, Klainermann & Majda, Schochet, Danchin, Alazard

Généalogie des modèles étudiés

Système DLMN – S. Dellacherie ('05), Y.P. ('09)

$$\left\{ \begin{array}{l} D_t Y = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = \mathcal{G}_\theta \\ \rho D_t \mathbf{u} = -\nabla \pi + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} \\ \rho c_p D_t T = \alpha T P'(t) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) \\ \theta = (Y, T, P) \end{array} \right.$$

Fermeture du modèle :

$$\mathcal{G}_\theta := \frac{-D_t \rho}{\rho} = -\frac{P'}{\Gamma P} + \frac{\beta \nabla \cdot (\kappa \nabla T)}{P}$$

Généalogie des modèles étudiés

Système DLMN – S. Dellacherie ('05), Y.P. ('09)

$$\left\{ \begin{array}{l} D_t Y = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = \mathcal{G}_\theta \\ \rho D_t \mathbf{u} = -\nabla \pi + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} \\ \rho c_p D_t T = \alpha T P'(t) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) \\ \theta = (Y, T, P) \end{array} \right.$$

Fermeture du modèle :

$$\mathcal{G}_\theta := \frac{-D_t \rho}{\rho} = -\frac{P'}{\Gamma P} + \frac{\beta \nabla \cdot (\kappa \nabla T)}{P} \implies P'(t) = \mathcal{H}_\theta(t)$$

Généalogie des modèles étudiés

Système DLMN – (découplage du champ de vitesse)

$$\left\{ \begin{array}{l} D_t Y = 0 \\ \Delta \phi = \mathcal{G}_\theta, \quad \nabla \cdot \mathbf{w} = 0 \\ \rho D_t \mathbf{w} = -\nabla \pi + \mu \Delta \mathbf{w} + \rho \mathbf{g} - \rho D_t \nabla \phi \\ \rho c_p D_t T = \alpha T P'(t) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) \\ \theta = (Y, T, P), \quad \mathbf{u} = \mathbf{w} + \nabla \phi \end{array} \right.$$

Fermeture du modèle :

$$\mathcal{G}_\theta := \frac{-D_t \rho}{\rho} = -\frac{P'}{\Gamma P} + \frac{\beta \nabla \cdot (\kappa \nabla T)}{P} \quad \Rightarrow \quad P'(t) = \mathcal{H}_\theta(t)$$

Généalogie des modèles étudiés

Systeme DLMN – (modèle potentiel)

$$\left\{ \begin{array}{l} D_t Y = 0 \\ \Delta \phi = \mathcal{G}_\theta, \quad \nabla \cdot \mathbf{w} = 0 \\ \rho D_t \mathbf{w} = -\nabla \pi + \mu \Delta \mathbf{w} + \rho \mathbf{g} - \rho D_t \nabla \phi \\ \rho c_p D_t T = \alpha T P'(t) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) \\ \theta = (Y, T, P), \quad \mathbf{u} = \mathbf{w} + \nabla \phi \end{array} \right.$$

Fermeture du modèle :

$$\mathcal{G}_\theta := \frac{-D_t \rho}{\rho} = -\frac{P'}{\Gamma P} + \frac{\beta \nabla \cdot (\kappa \nabla T)}{P} \quad \Rightarrow \quad P'(t) = \mathcal{H}_\theta(t)$$

Généalogie des modèles étudiés

Système DLMN – (β constant)

$$\left\{ \begin{array}{l} D_t Y = 0 \\ \Delta \phi = \mathcal{G}_\theta, \nabla \cdot \mathbf{w} = 0 \\ \rho D_t \mathbf{w} = -\nabla \pi + \mu \Delta \mathbf{w} + \rho \mathbf{g} - \rho D_t \nabla \phi \\ \rho c_p D_t T = \alpha T P'(t) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) \\ \theta = (Y, T, p_0), \mathbf{u} = \mathbf{w} + \nabla \phi \end{array} \right.$$

Fermeture du modèle :

$$\mathcal{G}_\theta := \frac{-D_t \rho}{\rho} = -\frac{P'}{\Gamma P} + \frac{\beta \nabla \cdot (\kappa \nabla T)}{P} \implies P'(t) = \mathcal{H}_\theta(t)$$

Généalogie des modèles étudiés

Modèle Abstrait de Vibration de Bulles

$$\begin{cases} \partial_t Y + \nabla \phi \cdot \nabla Y = 0, \\ \Delta \phi = \mathcal{G}_Y(t, \mathbf{x}) := \psi(t) \left[Y(t, \mathbf{x}) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y(t, \mathbf{x}') \, d\mathbf{x}' \right]. \end{cases} \quad (\text{ABV})$$

Pulsation (donnée) : $\psi \in \mathcal{C}^0(0, +\infty)$.

Conditions initiales et aux limites

$$Y(0, \mathbf{x}) = Y_0(\mathbf{x}) \quad \Longrightarrow \quad \Delta \phi_0 = \mathcal{G}_{Y_0}$$

$$\nabla \phi \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{condition de } \mathbf{jauge} : \int_{\Omega} \phi(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0$$

Le modèle ABV est un système **intégro-différentiel** couplant une équation hyperbolique et une équation elliptique.

Plan de la partie

- 1 Construction du modèle
- 2 **Analyse du modèle ABV**
 - Données régulières
 - Une propriété algébrique
 - Étude du cas de la dimension 1
- 3 Outils pour la simulation numérique du modèle

Problème bien posé

On note $s_0 = \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 1$.

Théorème (S. Dellacherie & O. Lafitte ('05); Y.P. ('10))

Soit $Y_0 \in H^s(\Omega)$, $s \geq s_0 + 1$. Alors il existe $\mathcal{T} > 0$ pour lequel le modèle ABV admet une unique solution classique Y sur $[0, \mathcal{T}]$. On a de plus :

$$Y \in \mathcal{W}_{s, \mathcal{T}}(\Omega) := \mathcal{C}^0([0, \mathcal{T}], L^2(\Omega)) \cap L^\infty([0, \mathcal{T}], H^s(\Omega)).$$

Théorème (Y.P. ('10))

La solution existe sur l'intervalle $[0, \mathcal{T}_*]$, avec $\mathcal{T}_* > 0$ donné par :

$$\left\| Y_0 - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y_0(x) dx \right\|_s \cdot \int_0^{\mathcal{T}_*} |\psi(t)| dt \leq C_*(s, d, \Omega).$$

Remarques

Étude des espaces $\mathcal{W}_{s,\mathcal{T}}(\Omega)$

- ✪ Pour tous $s \in \mathbb{R}_+$ et $\mathcal{T} > 0$, $\mathcal{W}_{s,\mathcal{T}}(\Omega)$ est un **espace de Banach**, muni de la norme :

$$\|f\|_{s,\mathcal{T}} := \sup_{t \in [0,\mathcal{T}]} \|f(t, \cdot)\|_s.$$

- ✪ Pour tout $s' \in [0, s[$, $\mathcal{W}_{s,\mathcal{T}}(\Omega) \subset \mathcal{C}^0([0, \mathcal{T}], H^{s'}(\Omega))$.
 ➡ En particulier, pour $s \geq s_0$, $\mathcal{W}_{s,\mathcal{T}}(\Omega) \subset \mathcal{C}^0([0, \mathcal{T}] \times \bar{\Omega})$.
- ✪ Si $f \in \mathcal{W}_{s,\mathcal{T}}(\Omega)$, alors $\nabla f \in \mathcal{W}_{s-1,\mathcal{T}}(\Omega)$, $s > 1$.
- ✪ Si $(f, g) \in \mathcal{W}_{s_1,\mathcal{T}}(\Omega) \times \mathcal{W}_{s_2,\mathcal{T}}(\Omega)$, alors $f \times g \in \mathcal{W}_{s_3,\mathcal{T}}(\Omega)$, avec $s_3 = \min\{s_1, s_2, s_1 + s_2 - s_0\}$.

Ébauche de la preuve

- **Construction d'une suite** $(Y^{(k)})$ par linéarisation du système
- Caractère **borné** dans $\mathcal{W}_{s, \mathcal{T}}(\Omega)$:
 - ➡ $y_k := \|Y^{(k)}\|_{s, \mathcal{T}}$ solution de $y_{k+1} \leq C(\mathcal{T})e^{y_k}$
 - ➡ Condition suffisante de convergence de la suite : $C(\mathcal{T}) \leq 1/e$
 - ➡ $(Y^{(k)})$ est bornée dans $\mathcal{W}_{s, \mathcal{T}}(\Omega) \implies (Y^{(k)}) \xrightarrow{*} \tilde{Y} \in \mathcal{W}_{s, \mathcal{T}}(\Omega)$
- **Convergence forte** dans $\mathcal{W}_{0, \mathcal{T}}(\Omega)$
 - ➡ Inégalité de contraction
 - ➡ Suite de Cauchy quel que soit $t \leq \mathcal{T}$
 - ➡ Complétude de $\mathcal{W}_{0, \mathcal{T}}(\Omega)$
- Interpolation : **convergence forte** vers \tilde{Y} dans $\mathcal{W}_{s', \mathcal{T}}(\Omega)$ pour tout $s' < s$
- Utilisation de la continuité pour montrer que \tilde{Y} est bien **solution de (ABV)**

Moyenne des solutions

On note, pour Y solution de $\mathcal{ABV}[Y_0, \psi, \Omega]$:

$$\mu_n(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y^n(t, \mathbf{x}) \, dx.$$

La suite (μ_n) est définie pour toute solution (faible) dans $L^\infty([0, \mathcal{T}] \times \Omega)$.

Prenons le cas où Y_0 est à valeurs dans $[0, 1]$ (presque partout).

Moyenne des solutions

On note, pour Y solution de $\mathcal{ABV}[Y_0, \psi, \Omega]$:

$$\mu_n(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y^n(t, \mathbf{x}) \, dx.$$

La suite (μ_n) est définie pour toute solution (faible) dans $L^\infty([0, \mathcal{T}] \times \Omega)$. Prenons le cas où Y_0 est à valeurs dans $[0, 1]$ (presque partout).

Reformulation adaptée au concept de **solutions faibles** :

$$\begin{cases} \partial_t Y + \nabla \cdot (Y \nabla \phi) = \psi(t) Y \left(Y - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y(t, \mathbf{x}') \, dx' \right), \\ Y(t=0, \cdot) = Y_0, \\ \Delta \phi(t, \mathbf{x}) = \psi(t) \left(Y(t, \mathbf{x}) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y(t, \mathbf{x}') \, dx' \right), \\ \nabla \phi \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Moyenne des solutions

On note, pour Y solution de $\mathcal{ABV}[Y_0, \psi, \Omega]$:

$$\mu_n(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y^n(t, \mathbf{x}) \, dx.$$

La suite (μ_n) est définie pour toute solution (faible) dans $L^\infty([0, \mathcal{T}] \times \Omega)$. Prenons le cas où Y_0 est à valeurs dans $[0, 1]$ (presque partout).

En utilisant le **principe de renormalisation**, on prouve :

Lemme

Les termes de la suite (μ_n) vérifient les équations (au sens fort) :

$$\mu_n' = \psi(\mu_{n+1} - \mu_1 \mu_n).$$

Moyenne des solutions

Théorème

Si Y est une solution faible de $ABV[Y_0, \psi, \Omega]$ pour $Y_0 \in L^\infty(\Omega)$, alors :

$$\mu_n(t) = \frac{\int_{\Omega} [Y_0(x)]^n \exp[\Psi(t) Y_0(x)] dx}{\int_{\Omega} \exp[\Psi(t) Y_0(x)] dx}, \quad \Psi(t) := \int_0^t \psi(\tau) d\tau.$$

- La fonction μ_1 est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ .
- Si Ψ est périodique, alors μ_n l'est.
- On obtient une estimation L^2 de Y .
- On peut alors évaluer la moyenne de $F(Y)$ pour toute fonction F analytique.

Moyenne des solutions

Théorème

Si Y est une solution faible de $\mathcal{ABV}[Y_0, \psi, \Omega]$ pour $Y_0 \in L^\infty(\Omega)$, alors :

$$\mu_n(t) = \frac{\int_{\Omega} [Y_0(x)]^n \exp[\Psi(t) Y_0(x)] dx}{\int_{\Omega} \exp[\Psi(t) Y_0(x)] dx}, \quad \Psi(t) := \int_0^t \psi(\tau) d\tau.$$

Lorsque Y est la fonction indicatrice du domaine $\Omega_1(t)$, alors :

$$\mu_1(t) = \mu_n(t) = \frac{|\Omega_1(t)|}{|\Omega|} = \frac{|\Omega_1(0)| \exp \Psi(t)}{|\Omega| - |\Omega_1(0)| + |\Omega_1(0)| \exp \Psi(t)}.$$

représente le **volume relatif de la bulle**. Ce résultat fournit un **test de précision** pour les simulations.

Moyenne des solutions

Théorème

Si Y est une solution faible de $\mathcal{ABV}[Y_0, \psi, \Omega]$ pour $Y_0 \in L^\infty(\Omega)$, alors :

$$\mu_n(t) = \frac{\int_{\Omega} [Y_0(\mathbf{x})]^n \exp[\Psi(t) Y_0(\mathbf{x})] \, d\mathbf{x}}{\int_{\Omega} \exp[\Psi(t) Y_0(\mathbf{x})] \, d\mathbf{x}}, \quad \Psi(t) := \int_0^t \psi(\tau) \, d\tau.$$

On peut alors récrire le système comme un modèle purement différentiel :

$$\begin{cases} \partial_t Y + \nabla \phi \cdot \nabla Y = 0, \\ Y(0, \cdot) = Y_0, \\ \Delta \phi - \psi(t) Y = -\psi(t) \mu_1(t), \\ \nabla \phi \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Moyenne des solutions (principe du maximum)

Théorème

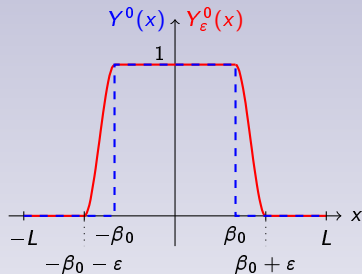
Si Y est une solution faible de $ABV[Y_0, \psi, \Omega]$ pour $Y_0 \in L^\infty(\Omega)$, alors :

$$\mu_n(t) = \frac{\int_{\Omega} [Y_0(\mathbf{x})]^n \exp[\Psi(t) Y_0(\mathbf{x})] \, d\mathbf{x}}{\int_{\Omega} \exp[\Psi(t) Y_0(\mathbf{x})] \, d\mathbf{x}}, \quad \Psi(t) := \int_0^t \psi(\tau) \, d\tau.$$

Théorème

Soit Y une solution faible de $ABV[Y_0, \psi, \Omega]$ avec $Y_0 \in L^\infty(\Omega)$. On suppose que Y_0 est à valeurs dans $[a, b]$ presque partout. Alors il en est de même pour $Y(t, \cdot)$ pour presque tout t .

Perspectives



$$Y_\varepsilon^0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-L, -\beta_0 - \varepsilon[\cup]\beta_0 + \varepsilon, L], \\ \Lambda\left(2\frac{x + \beta_0}{\varepsilon} + 1\right) & \text{si } x \in [-\beta_0 - \varepsilon, -\beta_0], \\ \Lambda\left(2\frac{\beta_0 - x}{\varepsilon} + 1\right) & \text{si } x \in [\beta_0, \beta_0 + \varepsilon], \\ 1 & \text{si } x \in]-\beta_0, \beta_0[. \end{cases}$$

Méthode des caractéristiques

Pour $Y_\varepsilon^0 \in H^2(-L, L)$, on introduit le problème :

$$\frac{d\mathcal{X}_\varepsilon}{dt} = u_\varepsilon(t, \mathcal{X}_\varepsilon(t; x_0)), \quad \mathcal{X}_\varepsilon(0; x_0) = x_0.$$

$t \mapsto \mathcal{X}_\varepsilon(t, \cdot)$ établit un difféomorphisme de $(-L, L)$ dans lui-même et est donc inversible (pour $t \in [0, \mathcal{I}_\varepsilon]$).

La solution vérifie donc :

$$Y_\varepsilon(t, x) = Y_\varepsilon^0(\mathcal{X}_\varepsilon^{-1}(t; x)).$$

Méthode des caractéristiques

Pour $Y_\varepsilon^0 \in H^2(-L, L)$, on introduit le problème :

$$\frac{d\mathcal{X}_\varepsilon}{dt} = u_\varepsilon(t, \mathcal{X}_\varepsilon(t; x_0)), \quad \mathcal{X}_\varepsilon(0; x_0) = x_0.$$

$t \mapsto \mathcal{X}_\varepsilon(t, \cdot)$ établit un difféomorphisme de $(-L, L)$ dans lui-même et est donc inversible (pour $t \in [0, \mathcal{I}_\varepsilon]$).

La solution vérifie donc :

$$Y_\varepsilon(t, x) = Y_\varepsilon^0(\mathcal{X}_\varepsilon^{-1}(t; x)).$$

Problème : \mathcal{I}_ε (prescrit par le théorème d'existence en temps fini) **tend vers 0** lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$!

Méthode des caractéristiques

$$\begin{aligned}
 \partial_{x_0} \mathcal{X}_\varepsilon(t; x_0) &= \exp \left[\int_0^t \partial_x u_\varepsilon(\tau, \mathcal{X}_\varepsilon(\tau; x_0)) d\tau \right], \\
 &= \exp \left[\int_0^t \psi(\tau) [Y_\varepsilon(\tau, \mathcal{X}_\varepsilon(\tau; x_0)) - \mu_\varepsilon(\tau)] d\tau \right], \\
 &= e^{\Psi(t) Y_\varepsilon^0(x_0)} \exp \left[- \int_0^t \psi(\tau) \mu_\varepsilon(\tau) d\tau \right] = \frac{2L \exp [\Psi(t) Y_\varepsilon^0(x_0)]}{\int_{-L}^L \exp [\Psi(t) Y_\varepsilon^0(y)] dy}.
 \end{aligned}$$

On intègre alors cette dernière égalité par rapport à x_0 , ce qui donne :

$$\mathcal{X}_\varepsilon(t; x_0) = 2L \frac{\int_{-L}^{x_0} \exp [\Psi(t) Y_\varepsilon^0(y)] dy}{\int_{-L}^L \exp [\Psi(t) Y_\varepsilon^0(y)] dy} - L.$$

Méthode des caractéristiques

Théorème

Soient $Y_0 \in L^\infty(-L, L)$ et ψ continue. Alors une solution faible globale en temps de $\mathcal{ABV}[Y_0, \psi, \Omega]$ est donnée par $\mathcal{Y}(t, x) = Y_0(\Theta_t^{-1}(x))$, où Θ_t^{-1} est la réciproque (par rapport à x_0) de la fonction :

$$\Theta(t, x_0) = 2L \frac{\int_{-L}^{x_0} \exp \Psi(t) Y^0(y) dy}{\int_{-L}^L \exp \Psi(t) Y^0(y) dy} - L.$$

Idées de base dans la preuve

- Changement de variables lipschitzien [Evans et Gariepy, **CRC-Press**, 1992].
- Validité de l'équation caractéristique $\partial_t \Theta = \mathcal{U}(t, \Theta)$.
- Calcul de la quantité : $\mathcal{A}(\mathcal{Y}) := \iint \mathcal{Y}[\partial_t \varphi + \mathcal{U} \partial_x \varphi](t, x) dt dx$.

Bilan

📌 Résultats

- ➡ **Existence et unicité** de solutions classiques en temps fini ($Y_0 \in H^s$)
- ➡ Existence de **solutions faibles** (et classiques) **globales en temps** en dimension 1, et en dimensions 2 / 3 à symétrie radiale ($Y_0 \in L^\infty$)
- ➡ **Formules explicites** de solutions particulières et de la moyenne des solutions ($Y_0 \in L^\infty$)
- ➡ **Principe du maximum** faible ($Y_0 \in L^\infty$)

📌 Perspectives

- ➡ Traitement des données L^∞ (**solutions faibles**) en dimension quelconque
 - Yudovic (dimension 2)
 - Lions – DiPerna
- ➡ Amélioration de l'estimation du **temps d'existence**

Bilan

🐞 Résultats

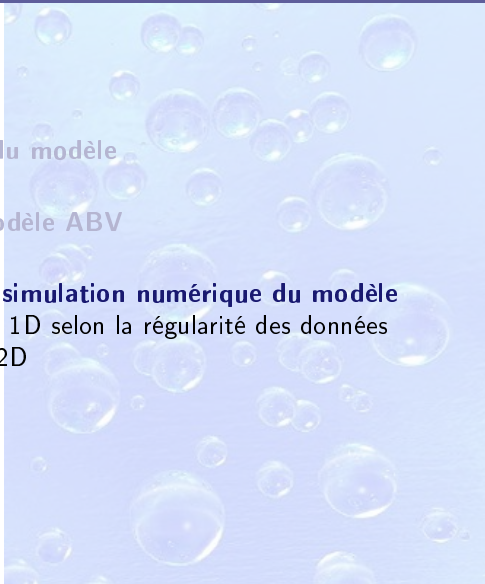
- ➡ **Existence et unicité** de solutions classiques en temps fini ($Y_0 \in H^s$)
- ➡ Existence de **solutions faibles** (et classiques) **globales en temps** en dimension 1, et en dimensions 2 / 3 à symétrie radiale ($Y_0 \in L^\infty$)
- ➡ **Formules explicites** de solutions particulières et de la moyenne des solutions ($Y_0 \in L^\infty$)
- ➡ **Principe du maximum** faible ($Y_0 \in L^\infty$)

🐞 Perspectives

- ➡ Traitement des données L^∞ (**solutions faibles**) en dimension L quelconque
 - Yudovic (dimension 2)
 - Lions – DiPerna
- ➡ Amélioration de l'estimation du **temps d'existence**

Plan de la partie

- 1 Construction du modèle
- 2 Analyse du modèle ABV
- 3 **Outils pour la simulation numérique du modèle**
 - Approches en 1D selon la régularité des données
 - Résultats en 2D



Schémas MOC

Objectifs

- Simuler les **solutions régulières** de l'équation $\partial_t Y + \mathbf{U} \cdot \nabla Y = f$;
- Atteindre **l'ordre 2** en espace-temps.

Idée

La méthode des caractéristiques fournit l'égalité :

$$Y(t, \mathbf{x}) = Y(t - \Delta t, \mathcal{X}(t - \Delta t; t, \mathbf{x})) + \int_{t-\Delta t}^t f(\sigma, \mathcal{X}(\sigma; t, \mathbf{x})) d\sigma,$$

pour \mathcal{X} solution de :






$$\frac{d\mathcal{X}}{dt} = \mathbf{U}(t, \mathcal{X}(t; s, \mathbf{x})), \quad \mathcal{X}(s; s, \mathbf{x}) = \mathbf{x}.$$

Schémas MOC

Objectifs

- Simuler les **solutions régulières** de l'équation $\partial_t Y + \mathbf{U} \cdot \nabla Y = f$;
- Atteindre **l'ordre 2** en espace-temps.

Littérature

-  F. Holly & A. Preissmann, J. Hydr. Div., 103(11), 1977.
-  O. Pironneau, Numer. Math., 38(3), 1982.
-  J. Douglas & T. Russel, SIAM J. Numer. Anal., 19(5), 1982.
-  A. Staniforth & J. Côté, Monthly Weather Rev., 119, 1991.
-  D. Duran, Numer. Meth. for Fluid Dynam. with Appl. to Geophys., 2010.

Schémas MOC (dimension 1)

On se donne un maillage x_i en espace et (t^n) en temps. Pour $f = 0$, le schéma s'écrit :

$$Y_i^{n+1} = Y(t^n, \xi_i^n), \quad \xi_i^n = \mathcal{X}(t^n; t^{n+1}, x_i).$$

Deux étapes

- Calcul du **pied de la caractéristique** ξ_i^n : montée à l'ordre 2 par un développement limité de \mathcal{X} autour de (t^n, x_i)
- **Approximation de** $Y(t^n, \xi_i^n)$: seules les valeurs aux nœuds du maillage sont connues \implies montée à l'ordre 2 par une interpolation ... d'ordre 2

Choix

Garantir le **principe du maximum**

Schéma MOC2

Flot caractéristique :

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{X}}{d\tau} = u(\tau, \mathcal{X}(\tau; s, x)) \\ \mathcal{X}(s; s, x) = s \end{cases}$$

Ordre 2 pour l'approximation en temps :

$$\mathcal{X}(t^n; t^{n+1}, x_i) = \mathcal{X}(t^n; t^n, x_i) + \Delta t \partial_s \mathcal{X}(t^n; t^n, x_i) + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_{ss}^2 \mathcal{X}(t^n; t^n, x_i) + \mathcal{O}(\Delta t^3)$$

Schéma MOC2

Flot caractéristique :

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{X}}{d\tau} = u(\tau, \mathcal{X}(\tau; s, x)) \\ \mathcal{X}(s; s, x) = s \end{cases}$$

Ordre 2 pour l'approximation en temps :

$$\mathcal{X}(t^n; t^{n+1}, x_i) = \mathcal{X}(t^n; t^n, x_i) - \Delta t u(t^n, x_i) + \frac{\Delta t^2}{2} [u \partial_x u - \partial_t u](t^n, x_i) + \mathcal{O}(\Delta t^3)$$

Schéma MOC2

Flot caractéristique :

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{X}}{d\tau} = u(\tau, \mathcal{X}(\tau; s, x)) \\ \mathcal{X}(s; s, x) = s \end{cases}$$

Ordre 2 pour l'approximation en temps :

$$\mathcal{X}(t^{n+1}; t^{n+1}, x_i) = \mathcal{X}(t^n; t^n, x_i) - \Delta t u(t^n, x_i) + \frac{\Delta t^2}{2} [u \partial_x u - \partial_t u](t^n, x_i) + \mathcal{O}(\Delta t^3)$$

Étape d'espace : interpolation(s) du 2nd-ordre

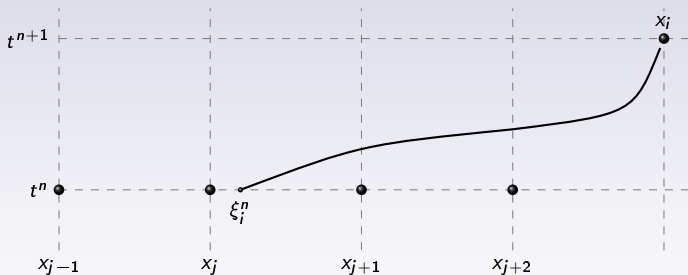


Schéma MOC2

Flot caractéristique :

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{X}}{d\tau} = u(\tau, \mathcal{X}(\tau; s, x)) \\ \mathcal{X}(s; s, x) = s \end{cases}$$

Ordre 2 pour l'approximation en temps :

$$\mathcal{X}(t^n; t^{n+1}, x_i) = \mathcal{X}(t^n; t^n, x_i) - \Delta t u(t^n, x_i) + \frac{\Delta t^2}{2} [u \partial_x u - \partial_t u](t^n, x_i) + \mathcal{O}(\Delta t^3)$$

Étape d'espace : interpolation(s) du 2nd ordre

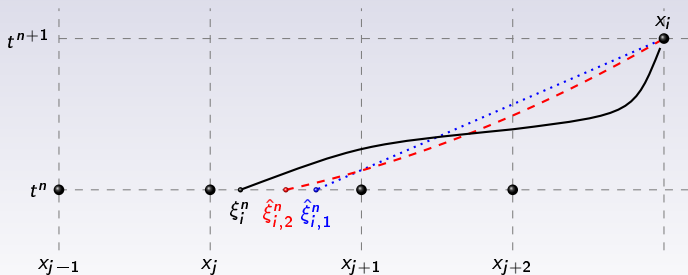


Schéma MOC2

Flot caractéristique :

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{X}}{d\tau} = u(\tau, \mathcal{X}(\tau; s, x)) \\ \mathcal{X}(s; s, x) = s \end{cases}$$

Ordre 2 pour l'approximation en temps :

$$\mathcal{X}(t^{n+1}; t^{n+1}, x_i) = \mathcal{X}(t^n; t^n, x_i) - \Delta t u(t^n, x_i) + \frac{\Delta t^2}{2} [u \partial_x u - \partial_t u](t^n, x_i) + \mathcal{O}(\Delta t^3)$$

Étape d'espace : interpolation(s) du 2nd-ordre

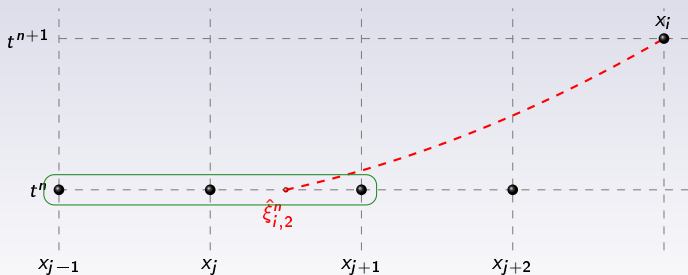


Schéma MOC2

Flot caractéristique :

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{X}}{d\tau} = u(\tau, \mathcal{X}(\tau; s, x)) \\ \mathcal{X}(s; s, x) = s \end{cases}$$

Ordre 2 pour l'approximation en temps :

$$\mathcal{X}(t^{n+1}; t^{n+1}, x_i) = \mathcal{X}(t^n; t^n, x_i) - \Delta t u(t^n, x_i) + \frac{\Delta t^2}{2} [u \partial_x u - \partial_t u](t^n, x_i) + \mathcal{O}(\Delta t^3)$$

Étape d'espace : interpolation(s) du 2nd-ordre

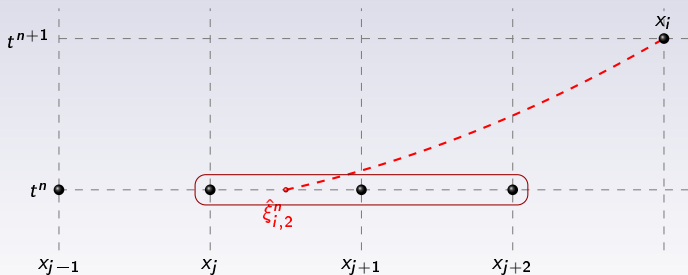


Schéma MOC2

Flot caractéristique :

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{X}}{d\tau} = u(\tau, \mathcal{X}(\tau; s, x)) \\ \mathcal{X}(s; s, x) = s \end{cases}$$

Ordre 2 pour l'approximation en temps :

$$\mathcal{X}(t^{n+1}; t^{n+1}, x_i) = \mathcal{X}(t^n; t^n, x_i) - \Delta t u(t^n, x_i) + \frac{\Delta t^2}{2} [u \partial_x u - \partial_t u](t^n, x_i) + \mathcal{O}(\Delta t^3)$$

Étape d'espace : interpolation(s) du 2nd-ordre

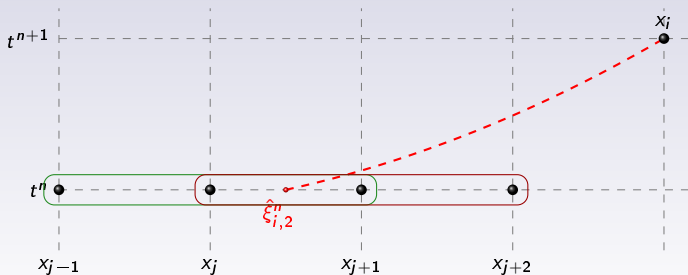


Schéma MOC2

Flot caractéristique :

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{X}}{d\tau} = u(\tau, \mathcal{X}(\tau; s, x)) \\ \mathcal{X}(s; s, x) = s \end{cases}$$

Ordre 2 pour l'approximation en temps :

$$\mathcal{X}(t^n; t^{n+1}, x_i) = \mathcal{X}(t^n; t^n, x_i) - \Delta t u(t^n, x_i) + \frac{\Delta t^2}{2} [u \partial_x u - \partial_t u](t^n, x_i) + \mathcal{O}(\Delta t^3)$$

Étape d'espace : interpolation(s) du 2nd-ordre

Schéma

$$\theta = \frac{x_{j+1} - \xi_i^n}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned} Y_i^{n+1} = \alpha_{ij}^n & \left[-\frac{\theta(1-\theta)}{2} Y_{j-1}^n + \theta(2-\theta) Y_j^n + \frac{(1-\theta)(2-\theta)}{2} Y_{j+1}^n \right] \\ & + (1-\alpha_{ij}^n) \left[\frac{\theta(1+\theta)}{2} Y_j^n + (1-\theta^2) Y_{j+1}^n - \frac{\theta(1-\theta)}{2} Y_{j+2}^n \right] \end{aligned}$$

Schéma MOC2

Flot caractéristique :

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{X}}{d\tau} = u(\tau, \mathcal{X}(\tau; s, x)) \\ \mathcal{X}(s; s, x) = s \end{cases}$$

Ordre 2 pour l'approximation en temps :

$$\mathcal{X}(t^n; t^{n+1}, x_i) = \mathcal{X}(t^n; t^n, x_i) - \Delta t u(t^n, x_i) + \frac{\Delta t^2}{2} [u \partial_x u - \partial_t u](t^n, x_i) + \mathcal{O}(\Delta t^3)$$

Étape d'espace : interpolation(s) du 2nd-ordre

Schéma

$$\theta = \frac{x_{j+1} - \xi_i^n}{\Delta x}$$

$$Y_i^{n+1} = \alpha_{ij}^n \left[-\frac{\theta(1-\theta)}{2} Y_{j-1}^n + \theta(2-\theta) Y_j^n + \frac{(1-\theta)(2-\theta)}{2} Y_{j+1}^n \right] \\ + (1 - \alpha_{ij}^n) \left[\frac{\theta(1+\theta)}{2} Y_j^n + (1-\theta^2) Y_{j+1}^n - \frac{\theta(1-\theta)}{2} Y_{j+2}^n \right]$$

Analyse du schéma

Non-linéarité du schéma du au paramétrage de α_{ij}^n

Stabilité inconditionnelle (au sens de *Von Neumann*)

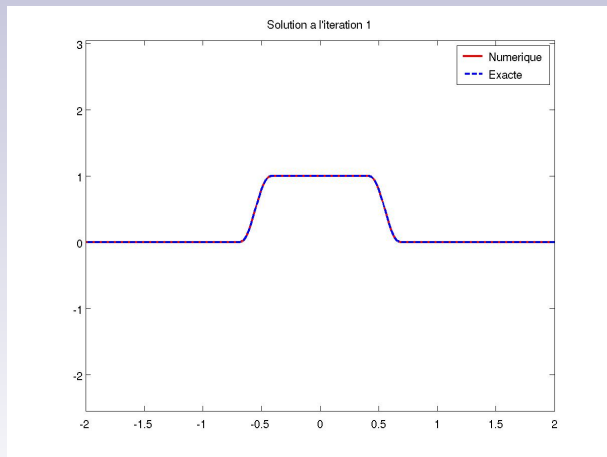
Consistance inconditionnelle

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i^n(\Delta t, \Delta x) := & \frac{1}{\Delta t} \left[Y(t^{n+1}, x_i) - \frac{\theta^2}{2} [Y(t^n, x_{j-1}) - 2Y(t^n, x_j) + Y(t^n, x_{j+1})] \right. \\ & \left. + \frac{\theta}{2} [Y(t^n, x_{j-1}) - 4Y(t^n, x_j) + 3Y(t^n, x_{j+1})] - Y(t^n, x_{j+1}) \right]. \end{aligned}$$

Ordre

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathcal{E}(\Delta t, \Delta x) = \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad \text{et} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \mathcal{E}(\Delta t, \Delta x) = \mathcal{O}(\Delta t^2).$$

Advection avec terme source $f(x) = \cos(\pi x/2)$



$$N_t = 100, N_x = 450$$

Advection avec terme source $f(x) = \cos(\pi x/2)$

$$N_t = 100, N_x = 450$$

Simulations du modèle ABV

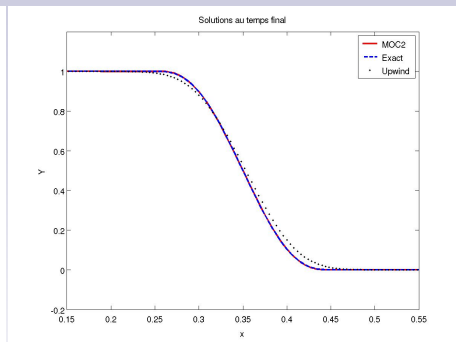
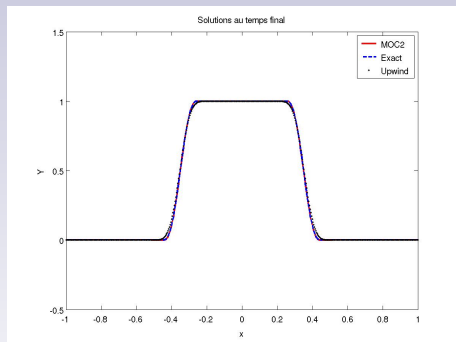
Données

- $\Omega = [-1, 1]$
- $\psi(t) = 2 \cos(30t)$
- Régularisations polynomiales de degrés 5, 1 et 0
- 200 itérations, 500 points en espace

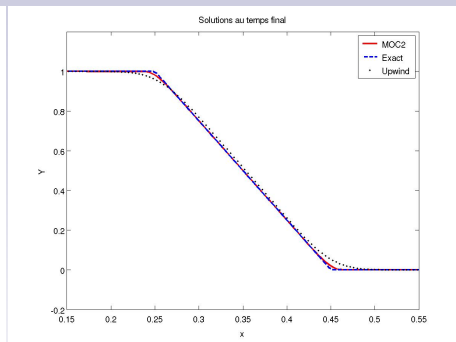
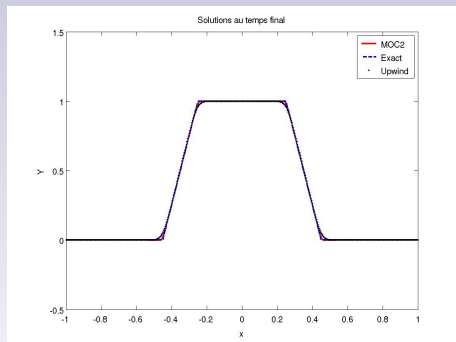
Approximation de la vitesse

$$U_i^n = \psi(t^n) \Delta x \left[\sum_{j=1}^{i-1} \frac{Y_j^n + Y_{j+1}^n}{2} - \frac{x_i + 1}{2} \sum_{j=1}^{N_x-1} \frac{Y_j^n + Y_{j+1}^n}{2} \right].$$

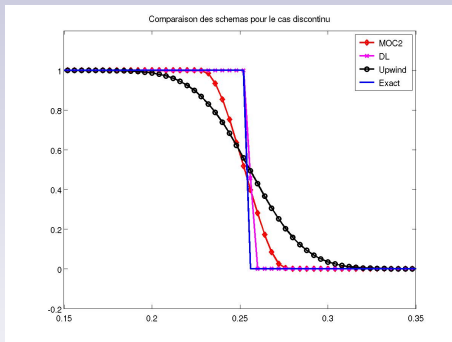
Simulations du modèle ABV (P_5)



Simulations du modèle ABV (P_1)



Simulations du modèle ABV (P_0)



Simulations en dimension 2 (donnée irrégulière)

Simulations en dimension 2 (donnée irrégulière)

Bilan

🐞 Résultats

- ➡ Construction d'un **schéma** en dimension 1 pour les solutions **classiques**, **inconditionnellement stable et consistant à l'ordre 2**
- ➡ Couplage entre le schéma de Després-Lagoutière avec un algorithme AMR pour la simulation en dimension 2 de solutions **faibles**

🐞 Perspectives

- ➡ Extension du schéma MOC2 à la **dimension 2**
- ➡ Simulations des modèles DLMN- β puis DLMN-p

Bilan

🐞 Résultats

- ➡ Construction d'un **schéma** en dimension 1 pour les solutions **classiques**, **inconditionnellement stable et consistant à l'ordre 2**
- ➡ Couplage entre le schéma de Després-Lagoutière avec un algorithme AMR pour la simulation en dimension 2 de solutions **faibles**

🐞 Perspectives

- ➡ Extension du schéma MOC2 à la **dimension 2**
- ➡ Simulations des modèles DLMN- β puis DLMN-p

A large, clear glass sphere is centered in the frame, set against a light green background. Inside the sphere, a miniature, inverted landscape is visible. The scene is upside down, with a dense forest of green trees at the top and a body of water at the bottom. The water's surface is dark and reflects the trees above. The sphere's surface is highly reflective, showing distorted reflections of the surrounding environment. The text "MERCI DE VOTRE ATTENTION" is printed in a black, serif font across the middle of the sphere.

MERCI DE VOTRE ATTENTION