



energie atomique • energies alternatives



Université Paris 13

Laboratoire d'Analyse, Géométrie et Applications

Organisme d'accueil : **Commissariat à l'Énergie Atomique,**
Centre de Saclay, DEN/DANS/DM2S/SFME/LETR

THÈSE

présentée en première version en vue d'obtenir le grade de Docteur,
spécialité « Mathématiques Appliquées »

par

Yohan Penel

ÉTUDE THÉORIQUE ET NUMÉRIQUE DE LA DÉFORMATION D'UNE INTERFACE SÉPARANT DEUX FLUIDES NON-MISCIBLES À BAS NOMBRE DE MACH

Thèse soutenue le 13 décembre 2010 après avis des rapporteurs :

Mme SYLVIE BENZONI-GAVAGE Université Lyon 1
M. BENOÎT PERTHAME Université Paris 6

et devant le jury composé de :

Mme	SYLVIE BENZONI-GAVAGE	Université Lyon 1	(Rapporteur)
M.	FRANCK BOYER	Université d'Aix-Marseille 3	(Président du jury)
M.	STÉPHANE DELLACHERIE	CEA	(Encadrant)
M.	JEAN-MARC DELORT	Université Paris 13	(Examinateur)
M.	BRUNO DESPRÉS	Université Paris 6	(Examinateur)
Mme	LAURENCE HALPERN	Université Paris 13	(Examinateur)
M.	OLIVIER LAFITTE	Université Paris 13	(Directeur de thèse)

À Mamie Bap

À Lulu

REMERCIEMENTS

Minds are like parachutes – they only function when open.

Thomas Dewar

Plus qu'une expérience professionnelle et au-delà des aspects scientifiques, une thèse est à mes yeux un chemin initiatique vers une meilleure connaissance de soi-même, une opportunité de prouver sa capacité à faire les bons choix, à explorer des contrées encore vierges et à améliorer la connaissance générale d'une thématique. De la rencontre entre un novice, un chercheur expérimenté et un sujet, peuvent naître différentes voies menant à un horizon initialement très flou. Il revient alors au doctorant le privilège de dessiner les contours de cet horizon. Il ne saurait cependant y parvenir sans aide : l'objet de ces quelques lignes est donc de remercier toutes les personnes qui, par leur présence ou leurs conseils, ont contribué à cette grande aventure.

Une thèse peut s'apparenter à un saut en parachute dans la mesure où les deux premières années sont comparables à la chute libre initiale : on est animé d'un sentiment de liberté, d'ivresse, alors que l'on se lance dans un projet, dans le nouveau monde qu'est celui de la recherche. C'est bien plus tard que l'on réalise que le sol se rapproche très rapidement. D'où l'importance d'un moniteur pour indiquer le meilleur moment pour ouvrir le parachute, en débutant la rédaction du mémoire ; une dernière étape où l'intensité est croissante à mesure que l'on se rapproche de l'échéance, jusqu'au moment où, si tout se passe bien, on pose les pieds à terre, sain (?) et sauf. En un mot, une délivrance, car même si c'est avant tout une satisfaction personnelle, cela reste une épreuve usante (surtout sur la fin ;-)).

Mes premiers remerciements vont naturellement à **Olivier** et **Stéphane**, qui m'ont accompagné tout au long de cette aventure ; à Olivier pour sa confiance constante depuis six ans et mon arrivée un matin de septembre 2004 à Galilée, et à Stéphane pour tellement de choses, en particulier pour son attention et son soutien permanents, ainsi que pour ses relectures minutieuses et ses encouragements dans les moments les plus difficiles. Mille fois merci.

Je remercie chaleureusement **Sylvie Benzoni-Gavage** et **Benoît Perthame** pour avoir accepté de rapporter sur ma thèse et m'avoir permis, à travers leurs commentaires et remarques, d'améliorer ma connaissance et ma compréhension du sujet. Merci à **Jean-Marc Delort** pour sa présence dans mon jury, après m'avoir donné goût à la recherche en M2. Je souhaite également remercier **Laurence Halpern**, **Franck Boyer** et **Bruno Després** pour leur participation à mon jury. Et j'en profite pour tirer mon chapeau à Franck pour la qualité de son livre, que j'ai gardé à mes côtés pendant ces trois années.

Je tiens ensuite à exprimer ma gratitude à tous ceux qui ont contribué à la tenue de cette thèse en la finançant et en m'accueillant au CEA. Merci donc à **Daniel Caruge** (chef du SFME), à **Éric Royer** et **Danièle Gallo-Lepage** (chefs du LETR), à **Jacques Segré** (conseiller scientifique du DM2S), et plus généralement à mes collègues de laboratoire à Saclay et à Paris 13. En particulier, je remercie **Pascal Omnès**, qui m'a offert ma première expérience de chercheur et mon premier article, **Juliet Ryan** pour sa gentillesse et son aide depuis le début, **Emmanuel Audusse** et **David Dos Santos Ferreira** pour avoir été d'excellents professeurs puis de formidables collègues de bureau.

Mes pensées vont de même à tous mes camarades de jeu thésards, à commencer par **Floraine**, qui a partagé mon bureau pendant plus de deux ans dans une ambiance géniale. Je remercie également **Marie**, qui sait tout le bien que je pense d'elle, ainsi que tous les thésards du LETR, en particulier **Gloria** (merci pour tout, et bien plus encore) et **Benjamin**. Comment ne pas aussi remercier les participants à l'aventure MAIOT, comme **Clémence** et **Julien**, mes deux premiers présidents pour qui j'ai tant d'admiration. Merci à **Agnès**, **Arounie**, **Benoît** et **Sacha**, merci à **Thomas**, le seul, l'unique, l'incomparable. J'adresse également mes remerciements à **Anouar**, camarade de MACS, puis collègue admirable et si sympa. Merci à tous les autres, à Saclay et à P13, en particulier **Hayat** et tous les participants des Doctoriales 2008. Pour terminer ce chapitre « amis thésards », j'exprime toute mon affection et mon amitié à **Pauline** et **Matéo**, voisins fontenaisiens et pour lesquels je ne peux trouver de mots reflétant ma gratitude pour leur hospitalité.

Pour conclure la seule partie non scientifique de ce mémoire, je tiens à remercier tout mon petit monde du badminton, mes amis badistes gratiennois (**Fred**, **Sandra**, **JC**, **Philippe**, **Françoise** et tant d'autres), et plus généralement val d'oisiens (**Agnès**, **Anne**, **Caro L.**, **Francelyse**, **Paul**, et là aussi tant d'autres), pour cette vision commune du bénévolat. Merci à mes petits champions de France, pour cette joie immense de juin dernier. Il est ensuite difficile de trouver les mots pour remercier mes proches, amis ou membres de ma famille, tellement je tiens à eux. Merci à **Michaël**, **Caro M.**, **GG**, **Rémi**, **Armelle** et **Andréas**, à **Caro S.**, **Nath**, **Guillaume**, **JB** et **Oyo**. J'ai bien sûr gardé les meilleurs pour la fin, mes **oncles** et **tantes**, mes **grands-parents** que j'adore et que j'admire, avec une place toute particulière pour celle qui m'a quitté trop tôt et que je n'oublierai jamais. Merci enfin (c'est si peu dire) à **Gwendoline**, **Isabelle** et **Olivier**, ma sœur et mes parents, pour tout ce qu'ils m'ont apporté et m'apportent encore.

Il est temps de refermer cette page de remerciements, sinon je risque d'en remplir plus de pages qu'avec mes équations préférées ...¹

Bonne lecture !

¹ Merci à Julien Chiquet pour avoir mis à disposition son fichier de style L^AT_EX, dont je me suis largement inspiré pour rédiger ce mémoire.

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	vii
LISTE DES FIGURES	x
LISTE DES SYMBOLES	xiii
Introduction	1
I Position du problème	9
1 EXPRESSIONS DES MODÈLES	11
1.1 Préliminaires	12
1.1.1 Modèle initial	12
1.1.2 Conditions aux limites et initiales	14
1.2 Établissement du modèle	15
1.3 Reformulation	19
1.3.1 Décomposition du système	20
1.3.2 Cas particulier à μ constant	20
1.3.3 Le système complet	21
1.4 Systèmes dérivés	22
1.5 Bilan	24
2 OUTILS MATHÉMATIQUES	27
2.1 Espaces de Sobolev	28
2.2 Décomposition de Leray	30
2.3 Lemmes préliminaires	31
2.4 Méthode des caractéristiques	36
2.5 Estimations d'énergie et résultats d'existence	40
2.5.1 Equations de transport	41
2.5.2 Équations d'advection-diffusion	47
2.5.3 Équations elliptiques	55
2.5.4 Système de Navier-Stokes incompressible linéarisé	57
2.6 Combustion à bas Mach	61
2.6.1 Modèle	62
2.6.2 Théorème d'existence et d'unicité pour le modèle de combustion	66
2.6.3 Régions invariantes	68
2.7 Bilan	70

II	Modèle Abstrait de Vibration de Bulles	71
3	ÉTUDE THÉORIQUE DU MODÈLE	73
3.1	Étude qualitative du modèle ABV	75
3.1.1	Restrictions sur le potentiel	75
3.1.2	Donnée initiale	76
3.1.3	Résultat d'existence et d'unicité en temps fini	76
3.1.4	Réflexions sur le temps d'existence	82
3.1.5	Invariances par homothéties et translations	87
3.1.6	Autres propriétés pour des données moins régulières	88
3.1.7	Moyenne des solutions bornées	91
3.2	Modèle abstrait de vibration de bulle en dimension 1	99
3.2.1	Reformulations du modèle	100
3.2.2	Évolution d'une bulle dans un domaine borné	100
3.2.3	Approximations de solutions discontinues	104
3.3	Extension au cas radial en 2D et 3D	117
3.4	Conclusion	121
4	INTERFACES ET SIMULATIONS NUMÉRIQUES DU MODÈLE ABV	123
4.1	Introduction à la problématique de la simulation d'interfaces	125
4.1.1	Suivi d'interfaces	125
4.1.2	Capture d'interfaces	125
4.2	Transport de fonctions irrégulières : le schéma DL	127
4.3	Transport de fonctions régulières : le schéma MOC2	129
4.3.1	Notations	130
4.3.2	Construction du schéma	132
4.3.3	Étude séparée des deux schémas	138
4.3.4	Traitement du phénomène de dispersion : combinaison des deux schémas	144
4.3.5	Simulations numériques	151
4.4	Raffinement adaptatif de maillages	164
4.4.1	Motivations	164
4.4.2	Rappels sur les algorithmes AMR	164
4.4.3	Adaptation à la résolution de l'équation de transport	167
4.4.4	Simulations du modèle ABV	170
4.5	Un algorithme pour les équations de Navier-Stokes incompressible : le schéma MAC	171
4.6	Bilan	174
III	Diphasic Low Mach Number system	177
5	ÉTUDE DU SYSTÈME DLMN DANS LE CAS RÉGULIER	179
5.1	Système différentiel	180
5.2	Domaine d'existence	181
5.3	Preuve du théorème d'existence	185
5.3.1	Système itératif	185

5.3.2	Bornitude	187
5.3.3	Convergence	197
5.3.4	Énoncé du théorème	203
5.3.5	Viscosité non constante	205
5.4	Commentaires	206
Conclusion et perspectives		209
A QUELQUES OUTILS MATHÉMATIQUES SUPPLÉMENTAIRES		213
A.1	Identités différentielles	213
A.2	Propriété de continuation de la moyenne	213
B QUELQUES DÉTAILS DE CALCULS THERMODYNAMIQUES		217
B.1	Formulations des équations de Navier-Stokes	217
B.2	Calcul du second membre de l'équation de Poisson	219
BIBLIOGRAPHIE		221

LISTE DES FIGURES

1	Descriptif d'un réacteur à eau pressurisée (réalisé par G. Faccanoni)	7
1.1	Arbre généalogique des systèmes étudiés dans ce document	25
3.1	Variations de la fonction $\tilde{\Phi}(x) = u_0 - xe^{-x}$	79
3.2	Un exemple de donnée initiale irrégulière	101
3.3	Un exemple de donnée initiale régulière	104
3.4	Exemples de données initiales régulières et paires	104
3.5	Exemple de fonction « marche »	105
3.6	Profil de la solution régulière Y_ε	108
3.7	Courbes caractéristiques pour les cas tests « bulle 1D » ($L = 1, \beta_0 = 0.6,$ $\psi(t) = 1, \varepsilon = 0.2$)	117
4.1	Approximations d'ordres 1 et 2 de la courbe caractéristique passant par le point (t, x)	132
4.2	Problème de condition aux limites	137
4.3	Configurations de nœuds pouvant violer le principe du maximum	145
4.4	Lieux des barycentres $(\zeta, \mathcal{Y}_l(\theta)), l \in \{g, d\}$	145
4.5	Tableau de variations de $\vartheta(Y_{j-1}^n)$ dans le cas $Y_j^n < Y_{j+1}^n$	145
4.6	Deux critères de validité des schémas \mathcal{Y}_g et \mathcal{Y}_d	147
4.7	Description des schémas MOC2 et MOC2'	150
4.8	Phénomène de dispersion avec MOC _g et MOC _d	153
4.9	Comparaison des différentes stratégies	154
4.10	Schéma MOC2 pour $\lambda \in \mathbb{Z}$	155
4.11	Évolution de la solution pour l'équation avec terme source.	156
4.12	Courbes d'erreur au cours du temps pour les différentes formules d'inté- gration du terme source	157
4.13	Simulations à vitesse non constante	158
4.14	Ordre de convergence en fonction de Δt pour l'équation de Burgers à don- née linéaire	159
4.15	Équation de Burgers pour une donnée non triviale	160
4.16	Simulations du modèle ABV pour une régularisation \mathbb{P}_5	161
4.17	Simulations du modèle ABV pour une régularisation linéaire	162
4.18	Simulations du modèle ABV pour une donnée irrégulière	163
4.19	Mises en défaut de l'algorithme	165
4.20	Exemple de hiérarchie de maillages Properly Nested	167
4.21	Schéma de l'algorithme AMR	168

4.22	Apport de l'AMR par rapport aux cas traités sur les figures 4.19	169
4.23	Schéma de l'algorithme LDC	170
4.24	Simulations du modèle Avv par l'algorithme DL-AMR-LDC	172
4.25	Inconnues pour le schéma MAC	172

LISTE DES SYMBOLES

Variables intervenant dans le cadre du modèle ABV

α, β	Extrémités du plateau pour la solution discontinue en dimension 1, page 101
$\beta_\varepsilon, \delta_\varepsilon$	Abscisses correspondant aux zones de régularisation $[-\delta_\varepsilon(t), -\beta_\varepsilon(t)]$ et $[\beta_\varepsilon(t), \delta_\varepsilon(t)]$, page 108
ε	Réel strictement positif correspondant à la taille de la zone de régularisation, page 106
Θ	Flot caractéristique associé au modèle en dimension 1, page 112
Λ	Fonction « marche » définissant la forme de la zone de régularisation, page 106
$\mu (\mu_\Omega)$	Moyenne intégrale sur le domaine Ω (par défaut), page 76
μ_n	Moyenne des puissances de Y sur le domaine Ω , page 91
ν	Normale extérieure à la frontière $\partial\Omega$, page 73
s_0	Plus petit entier tel que $\mathcal{H}^{s_0}(\mathbb{R}^d) \subset L^\infty(\mathbb{R}^d)$, i.e. $s_0 = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$, page 76
\mathcal{X}_ε	Flot caractéristique associé au modèle 1D régularisé, voir équation (3.22a), page 107
ϕ	Potentiel de vitesse, page 73
$\underline{\chi}_r$	Exposant intervenant dans l'équation d'énergie en norme $\mathcal{W}_{r, \mathcal{F}}(\Omega)$ relative aux équations de type advection, page 41
ψ	Pulsation (fonction continue du temps), page 73
Ψ	Primitive de ψ s'annulant en 0, page 76
$\tilde{\Psi}$	Primitive de la valeur absolue de ψ s'annulant en 0, page 76
Y	Fraction massique du fluide 1, page 73
\mathbb{Y}	Espace des fonctions bornées à valeurs dans $[0, 1]$, page 76
Y_ε^0	Donnée initiale en dimension 1 régularisée sur une zone de taille $\varepsilon > 0$, voir équation (3.20), page 106
Y_ε	Solution en dimension 1 associée à la donnée Y_ε^0 , page 106
Ω	Domaine d'étude (borné et régulier), page 73
$\Omega_1(t)$	Domaine où la variable Y est égale à 1, page 91

Constantes

- $C_{abv}(s, d, \Omega)$ Constante apparaissant dans l'estimation du temps d'existence pour le modèle ABV, page 77
- $C_{adv,0}(r, d, \Omega)$ Constante apparaissant dans l'estimation d'énergie en norme $\mathcal{W}_{r,\mathcal{F}}(\Omega)$ relative aux équations de type advection, page 41
- $C_{adv,1}(r, d, \Omega)$ Constante apparaissant dans l'estimation d'énergie en norme $\mathcal{X}_{r,\mathcal{F}}(\Omega)$ relative aux équations de type advection, page 42
- $C_{adv-d,i}$ ($i \in \{0, 1\}$) Constantes apparaissant dans l'estimation d'énergie relative aux équations de type advection-diffusion, page 47
- $C_{comp}(k, d)$ Constante apparaissant dans le lemme 2.6 sur les estimations de composées de fonctions, page 34
- $C_{dev}(\zeta, d)$ Constante apparaissant dans le lemme 2.7, page 35
- $C_{ell}(s, d, \Omega)$ Constante de régularité elliptique, page 55
- $C_{ell,1}, C_{ell,2}$ Constantes apparaissant dans l'estimation de solutions d'équations elliptiques, page 55
- $C_M(s_1, s_2, d)$ Constante apparaissant dans le lemme 2.3 sur les estimations de Moser (produit de fonctions de \mathcal{H}^{s_1} et \mathcal{H}^{s_2} , page 32
- C_{Mp} Constante apparaissant dans le lemme 2.4, page 32
- C_{PW} Constante de Poincaré-Wirtinger, page 56
- $C_{Q,1}, C_{Q,2}$ Constantes de projection de Leray, page 59
- $C_X(s_1, s_2, d)$ Constante apparaissant dans le corollaire 2.3 (produit de fonctions de $\mathcal{X}_{s_1,\mathcal{F}}(\Omega)$ et $\mathcal{X}_{s_2,\mathcal{F}}(\Omega)$, page 33

Variables intervenant dans le cadre du système DLMN

- α Coefficient de compressibilité de l'écoulement, page 15
- β Coefficient thermodynamique, page 19
- Γ Coefficient thermodynamique, page 19
- c Vitesse du son, page 19
- c_p Capacité calorifique à pression constante, page 15
- $D(\mathbf{u})$ Tenseur de déformations linéarisé associé au champ de vitesse \mathbf{u} , page 12
- ε Énergie interne de l'écoulement, page 12
- E Énergie totale de l'écoulement, page 12
- \mathbf{g} Champ de gravité, page 12
- \mathcal{G}_θ Variable donnant la valeur de la divergence du champ de vitesse, page 17
- Θ Contraintes s'appliquant au vecteur θ , page 179
- θ Triplet de variables principales (Y_1, T, P) , page 18
- $\underline{\theta}$ Notation pour le couple (T, P) , page 180
- ϑ Module de compressibilité, page 18
- h Enthalpie globale de l'écoulement, page 15
- \mathcal{H}_θ Variable donnant la valeur de la dérivée temporelle de la pression, page 19

κ	Conductivité thermique de l'écoulement, page 12
λ	Premier coefficient de Lamé, page 12
\mathcal{L}	Espace fonctionnel définissant la non-linéarité en θ , page 180
μ	Module de cisaillement de l'écoulement, page 12
ν	Normale extérieure à la frontière $\partial\Omega$, page 14
$\nu_{1 \rightarrow 2}$	Normale à l'interface $\Sigma(t)$ orientée du fluide 1 vers le fluide 2, page 13
Ξ	Ensemble des coefficients dépendant de θ , page 180
ξ_s	Exposant apparaissant dans l'estimation d'énergie relative aux équations de type advection-diffusion, page 47
π	Champ de pression dynamique, page 18
P	Champ de pression global de l'écoulement, page 12
\mathcal{P}	Projecteur de Leray sur l'espace des champs à divergence nulle et trace normale nulle sur le bord, page 31
\mathcal{Q}	Projecteur de Leray sur l'espace des champs de gradients, page 31
ρ	Densité globale de l'écoulement, page 12
σ	Tenseur de contraintes de Cauchy, page 12
$\Sigma(t)$	Interface entre les deux fluides, page 13
\mathcal{S}	Entropie globale de l'écoulement, page 15
τ	Vecteur tangent à la frontière $\partial\Omega$, page 20
T	Champ de température global de l'écoulement, page 12
\mathcal{T}	Réel strictement positif (temps d'existence), page 31
u	Champ de vitesse global de l'écoulement, page 12
w	Partie solénoïdale du champ de vitesse obtenue par la projection de Leray, page 20
ϕ	Potentiel de vitesse obtenu par la projection de Leray, page 20
$\bar{\chi}_r$	Exposant intervenant dans l'équation d'énergie en norme $\mathcal{X}_{r,\mathcal{T}}(\Omega)$ relative aux équations de type advection, page 42
Y_1	Fraction massique du fluide 1, page 12
Ω	Domaine d'étude (borné et régulier), page 12
$\Omega_1(t)$	Domaine occupé par le fluide 1 à l'instant t , page 13

Espaces

$\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$	Espace de Sobolev dans tout l'espace, page 28
$\mathcal{H}^m(\Omega)$	Espace de Sobolev dans le domaine borné Ω , page 28
$\mathcal{W}_{s,\mathcal{T}}(\Omega)$	Espace de travail associé aux équations d'advection : $\mathcal{W}_{s,\mathcal{T}}(\Omega) = \mathcal{C}^0([0, \mathcal{T}], L^2(\Omega)) \cap L^\infty([0, \mathcal{T}], \mathcal{H}^s(\Omega))$, page 31
$\mathcal{X}_{s,\mathcal{T}}(\Omega)$	Espace de travail associé aux équations d'advection-diffusion : $\mathcal{X}_{s,\mathcal{T}}(\Omega) = \mathcal{C}^0([0, \mathcal{T}], L^2(\Omega)) \cap L^\infty([0, \mathcal{T}], \mathcal{H}^s(\Omega)) \cap L^2([0, \mathcal{T}], \mathcal{H}^{s+1}(\Omega))$, page 31
$\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}(\Omega)$	Espace de solutions moins régulières pour le modèle ABV : $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}(\Omega) = L^\infty([0, \mathcal{T}], W^{1,\infty}(\Omega))$, page 88

Notations associées au schéma MOC2

Δt	Pas de temps, page 132
Δx	Pas d'espace, page 132
\mathcal{E}_i^n	Erreur de troncature, page 140
θ_{ij}^n	Position de l'approximation $\hat{\xi}_i^n$ dans l'intervalle $[x_j, x_{j+1}]$, voir équation (4.14), page 135
θ_l	Abscisse en laquelle la fonction $\mathcal{Y}_l(\theta)$ atteint son extremum, page 146
$\kappa_l^\#$	Antécédents de Y_j^n ($\# = -$) et Y_{j+1}^n ($\# = +$) par \mathcal{Y}_l , page 149
λ	Nombre de Courant, page 138
ξ_i^n	Pied au temps n de la courbe caractéristique passant par x_i au temps $n + 1$, page 133
$\hat{\xi}_{i,2}^n$	Approximation du pied de la caractéristique dans le schéma MOC2, voir équation (4.13), page 135
N_t	Nombre de points dans la discrétisation en temps, page 132
N_x	Nombre de points dans la discrétisation en espace, page 132
t^n	Discrétisation en temps, page 132
\mathbf{U}	Champ de vitesse en dimension quelconque, page 130
\mathcal{U}	Champ de vitesse en dimension 1, page 134
U_i^n	Approximation du champ de vitesse en (t^n, x_i) , page 135
\mathbf{X}_k	Représentation dans le plan (x, Y) de la solution Y_k^n , page 144
x_i	Discrétisation en espace, page 132
Φ	Flot caractéristique associé à l'équation d'advection (4.6), considéré comme une fonction de (t, s, x_0) , page 132
Y_i^n	Approximation de la solution en (t^n, x_i) , voir équation (4.9), page 133
\mathcal{Y}_d	Schéma d'interpolation utilisant les points x_j, x_{j+1}, x_{j+2} , page 136
\mathcal{Y}_g	Schéma d'interpolation utilisant les points x_{j-1}, x_j, x_{j+1} , page 136

Notations additionnelles

On précise enfin quelques notations utilisées couramment dans le manuscrit.

Notations générales des variables

De manière générale, les variables en gras désignent des vecteurs ou des matrices tandis que les autres variables sont scalaire. En particulier, on note :

$\mathbf{x}, \mathbf{y}(x, y)$ Variables d'espace en dimension $d \geq 2$ (resp. $d = 1$)
 t, τ, σ Variables de temps

On veillera donc à ne pas confondre τ/τ ou σ/σ .

Multi-indices

γ et ζ désignent des éléments de \mathbb{N}^d . On munit cet ensemble de la relation d'ordre :

$$\gamma \leq \zeta \iff \forall i \in \{1, \dots, d\}, \gamma_i \leq \zeta_i.$$

De manière classique, on note $|\gamma| = \sum_i \gamma_i$ la longueur de γ , puis, pour $\gamma \leq \zeta$:

$$\binom{\zeta}{\gamma} = \prod_i \binom{\zeta_i}{\gamma_i}.$$

Les opérateurs différentiels suivent la même règle :

$$\frac{\partial^\gamma}{\partial \mathbf{x}^\gamma} = \prod_i \frac{\partial^{\gamma_i}}{\partial x_i^{\gamma_i}}.$$

Opérateurs différentiels

Soient f une fonction réelle, \mathbf{u}, \mathbf{v} , des champs de \mathbb{R}^d et \mathbf{A} une application à valeurs dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. On utilise dans toute la suite l'opérateur différentiel d'ordre 1 ∇ (nabla) :

∇f Gradient de f : vecteur de \mathbb{R}^d de coordonnées $\partial_i f$
 $\nabla \mathbf{u}$ Matrice jacobienne de \mathbf{u} : matrice de coefficients $(\nabla \mathbf{u})_{ij} = \partial_j u_i$
 $\nabla \cdot \mathbf{u}$ Divergence de \mathbf{u} : opérateur scalaire $\sum_i \partial_i u_i$
 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ Divergence de \mathbf{A} : vecteur de \mathbb{R}^d de coordonnées $\sum_j \partial_j A_{ij}$
 $\nabla \wedge \mathbf{u}$ Rotationnel de \mathbf{u} : vecteur de coordonnées $\partial_i u_j - \partial_j u_i$
 $\nabla \nabla f = \text{Hess}(f)$ Matrice hessienne de f

De manière générale, on utilise la notation abrégée de dérivées spatiales D^γ pour $\frac{\partial^\gamma}{\partial \mathbf{x}^\gamma}$. On préférera la notation ∂_v^γ pour traiter les dérivées de fonctions composées.

Divers

La notation $|\mathbf{X}|$ désigne soit la valeur absolue de \mathbf{X} lorsque \mathbf{X} est une fonction, soit la mesure de Lebesgue de \mathbf{X} lorsque \mathbf{X} est un ensemble.

Une autre notation régulièrement utilisée est le crochet de Poisson. \mathcal{R} et \mathcal{T} étant deux opérateurs fonctionnels, on note $[\mathcal{T}, \mathcal{R}]f = \mathcal{T}(\mathcal{R}(f)) - \mathcal{R}(\mathcal{T}(f))$.

Par ailleurs, en reprenant les notations précédentes (\mathbf{u}, \mathbf{v} champs vectoriels et $\underline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{B}}$ champs matriciels), $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ est le produit tensoriel sur les vecteurs, *i.e.* la matrice de coefficients $u_i v_j$ et $\underline{\mathbf{A}} :: \underline{\mathbf{B}}$ est le produit scalaire usuel sur les matrices, donné par $\sum_{i,j} A_{ij} B_{ij}$.

Enfin, pour faciliter la lecture du manuscrit, on utilise le code couleur suivant :

Notations

Hypothèses

Résultats

Il est de plus recommandé de se reporter à la liste des symboles en cas de doute sur la signification de l'un d'entre eux dans le corps du texte. Toutes les constantes apparaissant dans les démonstrations sont notées différemment et référencées dans la liste des symboles. Leur définition est soit donnée au cœur des démonstrations, soit dans les remarques placées après.

INTRODUCTION

PROBLÉMATIQUE ET MODÉLISATION

Cette thèse a pour objet la modélisation des écoulements à bulles dans les cœurs de réacteurs nucléaires. Ce travail s'inscrit dans le vaste cadre des études de sûreté réalisées par le COMMISSARIAT À L'ÉNERGIE ATOMIQUE ET AUX ÉNERGIES ALTERNATIVES (CEA). La présence de bulles de vapeur dans des écoulements d'eau est inhérente au concept de réacteurs, que ce soit dans les réacteurs à eau bouillante (REB, ou BWR en anglais) en situation nominale (par définition) ou dans les réacteurs à eau pressurisée (REP, ou PWR en anglais – cf. FIG. 1) en situation incidentelle voire accidentelle (pour éviter les problèmes d'ébullition, on maintient l'eau sous forme liquide par une augmentation de la pression – il convient cependant de simuler les cas hautement improbables où le fluide caloporteur viendrait à se mélanger avec l'eau du circuit secondaire). Dans les deux cas, la modélisation permet d'étudier le comportement des bulles afin de prévenir ou de comprendre les accidents, comme ce fut le cas aux États-Unis en 1961 avec le réacteur SL-1.²

Mais la disparité des échelles d'espace et de temps intervenant dans ce contexte soulève de nombreux problèmes tant théoriques que numériques. Les plus petites bulles pouvant en effet avoir des dimensions de l'ordre du micron, il est « tentant » de les négliger devant les mètres de longueur du réacteur lui-même, notamment dans une perspective numérique. C'est pourquoi dans de nombreux modèles en CFD³, on raisonne sur des variables moyennées. L'objectif de la *Simulation Numérique Directe* (SND, ou DNS en anglais) est cependant de prendre en compte toutes ces échelles d'espace, en particulier celle des bulles, ajoutant aux difficultés de simulation le problème de la localisation des interfaces entre phases liquide et vapeur. Pour ces raisons, le développement de la SND est devenu un enjeu majeur en mécanique des fluides (entre autres), afin de mieux comprendre les phénomènes physiques, même si la simulation à l'échelle du réacteur, prenant en compte chacune des centaines de bulles individuellement, est encore hors de portée.

Quant aux échelles de temps (ondes acoustiques, ondes matérielles), on utilise un argument mathématique pour pallier à certaines difficultés. Principalement, compte-tenu du fait que le nombre de Mach est de l'ordre de 0,01 dans les écoulements considérés, il devient envisageable de négliger dans les équations certains termes fonctions de ce nombre de Mach. Cette méthode a été appliquée entre autres par Majda et Sethian [59] dans le cadre des phénomènes de combustion, où un développement asymptotique par rapport au nombre de Mach est effectué dans le système d'équations choisi pour la modélisation.

² Le réacteur militaire américain SL-1 était un réacteur de type BWR, détruit lors d'une vaporisation massive de l'eau entourant le cœur, due au mauvais déplacement d'une barre de contrôle.

³ *Computational Fluid Dynamics*.

En particulier, une des principales conséquences de ce raisonnement est de découpler le champ de pression en deux variables, l'une (thermodynamique) homogène en espace, et l'autre (dynamique) indépendante du nombre de Mach. Le résultat est un filtrage des ondes acoustiques, même si les principales propriétés du flot compressible sont conservées, en particulier les effets thermiques (forts gradients de température) et la non-nullité de la divergence du champ de vitesse. De nombreux travaux ont été menés sur ce thème et plus particulièrement sur la « convergence du compressible vers l'incompressible », *i.e.* sur le comportement des solutions lorsque le nombre de Mach tend vers 0. On peut citer les travaux de Majda et Klainermann [54, 55], de Schochet [80] ou plus récemment de Desjardins *et al.* [28], de Danchin [22] ou de Alazard [1].

Par ailleurs, d'un point de vue numérique, un schéma classique pour un écoulement compressible dégénère lorsque le nombre de Mach devient de plus en plus petit, ce qui en fait une problématique à part entière. Citons par exemple les travaux de Guillard et Viozat [45] ou de Dellacherie [26] sur les solveurs de type Godunov, travaux dans lesquels des explications sur ces mauvais comportements sont données. Des propositions ont alors été faites pour adapter au cas spécifique à bas Mach les schémas compressibles (comme par exemple le schéma de Roe-Turkel, ...). On peut aussi penser, dans la mesure où le modèle incompressible est la limite (au niveau continu) vers laquelle le modèle compressible converge, à utiliser des schémas incompressibles. Ces points ne seront toutefois pas évoqués ici.

Dans ce mémoire, nous considérons deux phases du même fluide, assimilé à deux fluides non-miscibles. En reprenant le concept bas Mach, nous construisons un système d'équations aux dérivées partielles, établi initialement par Dellacherie [24] et nommé DLMN (pour *Diphasic Low Mach Number*). Ce système, déduit des équations de Navier-Stokes sous les hypothèses physiques évoquées dans le chapitre précédent, présente de nombreuses non-linéarités, qu'elles soient de nature algébrique (produits) ou physique (coefficients donnés par des lois d'état et de comportement). Afin d'appréhender correctement chacun de ces termes, il est procédé dans [25] à certaines simplifications, débouchant sur deux nouveaux sous-systèmes. Le premier est dérivé sous l'hypothèse que le champ de vitesse est potentiel (d'où le nom de DLMN-potentiel), ce qui permet d'« écarter » une équation. Le second a pour but de fournir une meilleure connaissance d'un couplage entre deux équations du système principal. Les autres équations sont ainsi laissées de côté dans une première approche, afin de se concentrer uniquement sur ce couplage. Le système résultant est appelé *modèle ABV* (pour *modèle Abstrait de Vibration de Bulles*). L'analyse progressive de chacun de ces systèmes, du plus simple au plus complexe, permet de converger vers une meilleure compréhension des mécanismes régissant le comportement de l'écoulement. En particulier, de nombreux outils théoriques et numériques sont rappelés, améliorés ou tout simplement développés dans ce mémoire, afin de faciliter l'étude des systèmes à étudier dans l'avenir.

En ce qui concerne la partie théorique, nos recherches ont été principalement axées sur les « estimations d'énergie » associées aux équations constituant le système DLMN. Elles permettent en effet de construire une solution classique dans le cas où les données du problème sont régulières, la précision des estimations étant fondamentale pour évaluer le temps d'existence de ces solutions. Cependant, l'hypothèse de non-miscibilité des deux fluides sous-entend que certaines variables présentent une discontinuité à la traversée de l'interface, ce qui incite à travailler avec des données (et donc des solutions) de régularité très faible. Mais dans le même esprit que lors de la simplification des systèmes, une première étude sur des données régularisées fournit des indications sur les solutions, avec également l'éventualité de construire des solutions faibles en faisant converger un certain paramètre de régularisation vers 0. Ceci légitime les travaux présentés ici, qui constituent une première approche du problème. Quant aux aspects numériques, l'enjeu majeur des simulations concerne le traitement des interfaces. Ce sujet a fait l'objet de nombreuses publications, afin de garantir à la fois la précision mais aussi l'efficacité des méthodes numériques mises en œuvre. Nous présentons ici une approche différente obtenue en couplant plusieurs algorithmes, dédiés à la simulation des solutions discontinues. Lorsque ces solutions sont en revanche régulières, un autre schéma est construit et utilisé dans ce manuscrit. Divers résultats numériques sont alors détaillés afin de mettre en valeur les propriétés de ces algorithmes.

DESCRIPTION DU CONTENU DU MÉMOIRE

Le plan de la thèse s'articule autour de trois parties, décomposées en cinq chapitres, dont nous donnons ci-dessous une brève présentation.

Partie I : Position du problème

CHAPITRE 1 : EXPRESSIONS DES MODÈLES

Ce premier chapitre est consacré à l'établissement du système DLMN à partir des équations de Navier-Stokes. Ce cheminement, depuis le système le plus communément utilisé en mécanique des fluides jusqu'au modèle construit par *S. Dellacherie*, est basé sur des calculs thermodynamiques et sur un développement asymptotique à bas nombre de Mach. Il prend la forme :

$$\begin{cases} \partial_t Y_1 + \mathbf{u} \cdot \nabla Y_1 = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = \mathcal{G}_\theta, \\ \rho [\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] - 2 \nabla \cdot [\mu D(\mathbf{u})] = -\nabla \pi + \rho \mathbf{g}, \\ \rho c_p [\partial_t T + \mathbf{u} \cdot \nabla T] = \alpha T P'(t) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T), \\ P'(t) = \mathcal{H}_\theta(t). \end{cases} \quad (\text{DLMN})$$

Classiquement, \mathbf{u} désigne ici le champ de vitesse, T la température, P et π les champs de pressions thermodynamique et dynamique, et Y_1 la fraction massique du fluide 1. Les autres coefficients se déduisent de lois d'état et de comportement. Par rapport au modèle initial publié dans [24], nous apportons ici une modification de l'équation non linéaire sur le champ de vitesse \mathbf{u} , en utilisant la définition du tenseur de contraintes. Des précisions sont également apportées sur les conditions initiales et aux limites associées à ce système.

En supposant que le champ de vitesse est potentiel (*i.e.* $\mathbf{u} = \nabla\phi$), le système se simplifie et s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t Y_1 + \nabla\phi \cdot \nabla Y_1 = 0, \\ \Delta\phi = \mathcal{G}_\theta, \\ \rho c_p [\partial_t T + \nabla\phi \cdot \nabla T] = \alpha T P'(t) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T), \\ P'(t) = \mathcal{H}_\theta(t). \end{cases} \quad (\text{DLMN-p})$$

Il se compose d'une équation d'advection sur Y_1 , d'une équation de Poisson sur ϕ , d'une équation d'advection-diffusion sur T et d'une équation différentielle sur P . Le second membre \mathcal{G}_θ de l'équation de Poisson est une fonctionnelle dépendant de $\theta = (Y_1, T, P)$. La maîtrise de ce système permettra, en le couplant à un système de type Navier-Stokes incompressible, de pouvoir étudier le système DLMN. Mais dans un premier temps, on se concentre sur le couplage entre les deux premières équations. Pour cela, un dernier modèle a été introduit dans [25] :

$$\begin{cases} \partial_t Y(t, \mathbf{x}) + \nabla\phi(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla Y(t, \mathbf{x}) = 0, \\ \Delta\phi(t, \mathbf{x}) = \psi(t) \left[Y(t, \mathbf{x}) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y(t, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right]. \end{cases} \quad (\text{ABV})$$

ψ est ici une fonction continue du temps, qui sert de paramètre pour la déformation de l'interface. Ce nouveau système résulte donc d'une simplification mathématique (remplacement du second membre physique par un terme linéaire ne dépendant plus que de Y) et permet de mettre en lumière certaines propriétés des couplages hyperboliques-elliptiques.

CHAPITRE 2 : OUTILS MATHÉMATIQUES

Le second chapitre regroupe tous les éléments théoriques mis en œuvre dans les preuves d'existence et d'unicité de solutions des systèmes DLMN et ABV. Après avoir rappelé quelques éléments de la théorie de Leray, nous présentons des résultats sur les équations d'advection et d'advection-diffusion. Ces deux types d'équations sont largement présents dans la littérature mais nous redémontrons ici les résultats, en améliorant la précision des inégalités et en insistant sur la justification de chaque élément de démonstration, avec une analyse des espaces fonctionnels utilisés. Une partie est également consacrée à la méthode des caractéristiques. Nous concluons par une présentation des résultats d'Embid [36] sur la combustion, dont nous nous sommes largement inspirés dans la preuve du résultat sur le système DLMN. En particulier, nous clarifions certains points des démonstrations proposées par *Embid*.

Partie II : Modèle Abstrait de Vibration de Bulles

CHAPITRE 3 : ÉTUDE THÉORIQUE DU MODÈLE

Dans ce troisième chapitre, nous présentons l'analyse que nous avons faite du modèle ABV, comprenant un résultat d'existence et d'unicité en temps court de solutions pour des données régulières. Ce résultat avait été initialement prouvé dans [27]. Nous améliorons ici la preuve en éliminant les contraintes pesant sur le temps d'existence afin d'en donner une expression implicite. Nous prouvons ensuite diverses propriétés vérifiées par les éventuelles solutions dans un cadre moins régulier. En particulier, nous obtenons une expression explicite pour la moyenne des solutions, quelle que soit la régularité (au minimum bornée) de la donnée initiale $Y^0 = Y(0, \cdot)$. Ainsi, quelle que soit la solution Y du problème ABV muni de la donnée initiale Y^0 , on a :

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y(t, x) dx = \frac{\int_{\Omega} Y^0(x) \exp[\Psi(t)Y^0(x)] dx}{\int_{\Omega} \exp[\Psi(t)Y^0(x)] dx}.$$

Nous en déduisons en particulier un principe du maximum faible pour les solutions du modèle.

La suite du chapitre est consacrée à l'étude de la dimension 1, pour laquelle nous établissons l'existence de solutions globales en temps, pour toute donnée initiale bornée. Nous prouvons ce résultat en déterminant une solution (semi-)explicite⁴ fournie par la méthode des caractéristiques dans le cas régulier et qui s'avère être également valable dans le cas discontinu.

CHAPITRE 4 : INTERFACES ET SIMULATIONS NUMÉRIQUES DU MODÈLE ABV

Une fois l'analyse théorique du modèle ABV réalisée, nous nous intéressons aux aspects numériques, en débutant par un état de l'art sur les méthodes numériques dédiées à la simulation d'interfaces. En particulier, dans notre modèle, l'interface est repérée par la discontinuité de la fonction Y . La simulation de l'équation de transport linéaire s'avère donc fondamentale. De la même manière que pour la partie théorique, nous distinguons deux cas, selon la régularité des solutions. Dans le cas régulier (et en dimension 1), nous construisons un schéma basé sur la méthode des caractéristiques, que nous analysons dans le cas où le champ de vitesse est constant. Le schéma est alors d'ordre 2 en espace et en temps, sans restriction de stabilité ou de consistance. Dans le cas irrégulier (en dimension 2), nous couplons le caractère anti-diffusif du schéma de *Després* et *Lagoutière* à la précision d'un algorithme de raffinement adaptatif de maillage pour simuler les solutions du modèle ABV.

⁴ L'expression de la solution requiert l'inversion d'un homéomorphisme. Dans la mesure où l'inverse n'est pas connue explicitement, nous qualifions cette expression de semi-explicite.

Partie III : Diphasic Low Mach Number system

CHAPITRE 5 : ÉTUDE DU SYSTÈME DLMN DANS LE CAS RÉGULIER

Forts de l'analyse réalisée sur le modèle ABV, nous nous intéressons dans ce dernier chapitre au caractère bien posé (pour des données régulières) du système DLMN. Pour cela, nous construisons une suite de type itérées de Picard. En combinant des estimations d'énergie, nous prouvons que cette suite est bornée dans un certain espace et convergente dans un espace plus grand. Au préalable, nous définissons le type de non-linéarité en précisant les lois d'état et de comportement admissibles. La démonstration du résultat principal, dans un souci de clarté, est faite pour le cas où la viscosité est constante dans tout le domaine. Nous donnons ensuite les détails des points à modifier lorsque cette hypothèse est retirée. Nous obtenons ainsi un résultat en temps fini pour des données régulières, en précisant les contraintes qui s'appliquent sur le temps d'existence.

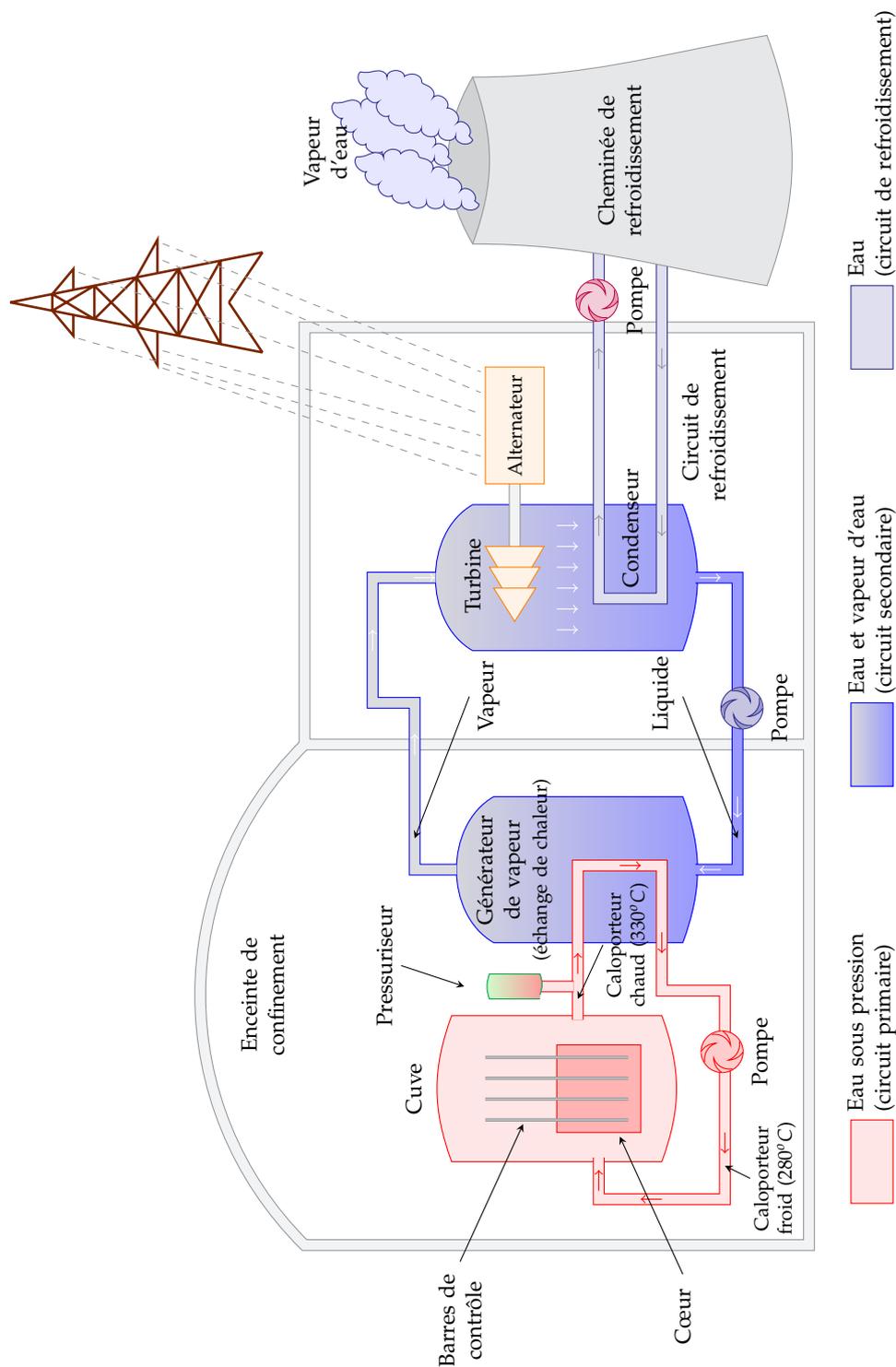


FIG. 1 – Descriptif d'un réacteur à eau pressurisée (réalisé par G. Faccanoni)

Première partie

Position du problème

EXPRESSIONS DES MODÈLES

1

SOMMAIRE

1.1	PRÉLIMINAIRES	12
1.1.1	Modèle initial	12
1.1.2	Conditions aux limites et initiales	14
1.2	ÉTABLISSEMENT DU MODÈLE	15
1.3	REFORMULATION	19
1.3.1	Décomposition du système	20
1.3.2	Cas particulier à μ constant	20
1.3.3	Le système complet	21
1.4	SYSTÈMES DÉRIVÉS	22
1.5	BILAN	24

 ANALYSE NUMÉRIQUE d'un système d'équations aux dérivées partielles comprend plusieurs étapes, de l'établissement d'un modèle initial jusqu'à la résolution numérique d'un modèle simplifié en passant par la question de l'existence et/ou de l'unicité de solutions. Le point de départ est le choix du système utilisé pour décrire le phénomène physique auquel on s'intéresse. Ce choix se porte ici, dans le cadre de la modélisation des bulles dans les cœurs de réacteurs, sur le système des équations de Navier-Stokes, qui est le plus couramment utilisé pour modéliser les écoulements en mécanique des fluides. La complexité du système complet¹ incite toutefois à modifier les équations en négligeant certains termes (par exemple des non-linéarités, des termes d'ordres différentiels plus élevés ou tout simplement des termes physiques dont l'impact est négligeable) pour bâtir progressivement un modèle qui permette de tester des outils théoriques et numériques. Dans ce processus d'analyse, on garde cependant à l'esprit le système initial (et en particulier ses propriétés physiques) auquel, une fois les études sur les systèmes dérivés réalisées, on revient en reprenant le cheminement inverse.

Dans le cas présent, on introduit successivement les modèles DLMN, DLMN potentiel et ABV. Le passage d'un système à l'autre correspond à des hypothèses physiques et/ou mathématiques qui préservent autant que possible la structure mathématique des équations et le sens physiques des variables. Le schéma général des modèles est résumé sur la figure 1.1, p. 25. Les équations présentées dans la suite ont été initialement établies

¹ Il n'existe à ce jour aucune preuve de l'existence et de l'unicité d'une solution forte aux équations de Navier-Stokes en dimension 3 d'espace.

et étudiées par S. DELLACHERIE dans [24, 25, 27]. On détaille ici le cheminement à partir des équations de Navier-Stokes jusqu'au modèle *Abstrait de Vibration de Bulles* en passant par le système *Diphasique à Bas Nombre de Mach*. On propose en particulier une nouvelle formulation du problème, avec une réécriture de certaines équations, ainsi qu'une étude des conditions qui assurent son caractère bien posé.

1.1 PRÉLIMINAIRES

1.1.1 Modèle initial

On considère initialement un écoulement diphasique compressible soumis à la gravité dans un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{1, 2, 3\}$, les phénomènes de changement de phase et de tension de surface n'étant pas pris en compte. On peut alors assimiler cet écoulement à un **écoulement compressible bi-fluide à caractère non-miscible**, hypothèse qui sera faite dans toute la suite. On fera donc le plus souvent référence aux **fluides 1 et 2** plutôt qu'aux phases gazeuse et liquide.

Le modèle choisi pour cette étude est celui proposé par *Navier* et par *Stokes* au XIX^{ème} siècle pour décrire le mouvement de fluides newtoniens.² Il prend ici la forme suivante en dimension 3 dans le repère (O, e_1, e_2, e_3) :

$$\begin{cases} \partial_t(\rho Y_1) + \nabla \cdot (\rho Y_1 \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g}, \\ \partial_t(\rho E) + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{u}) = -\nabla \cdot (P \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{u}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}. \end{cases} \quad (1.1)$$

La variable \mathbf{u} désigne ici le champ de vitesse global de l'écoulement, P la pression thermodynamique, ρ la densité, T le champ de température, $\mathbf{g} = -g e_3$ l'intensité de la pesanteur, $E = \varepsilon + |\mathbf{u}|^2/2$ l'énergie totale, ε l'énergie interne, κ la conductivité thermique (apparaissant dans la loi de Fourier) et $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur de contraintes de Cauchy (sous l'hypothèse de l'**élasticité linéaire**) donné par :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu D(\mathbf{u}) + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u}) \text{Id},$$

les variables scalaires μ et λ étant les coefficients de Lamé (*cf.* Chorin et Marsden [15], p.33, par exemple), et $D(\mathbf{u})$ le tenseur de déformation du système :

$$D(\mathbf{u}) = \frac{\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u}}{2}.$$

Les équations (1.1) correspondent donc respectivement à la conservation des masses partielles, de la masse globale, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale.

² Pour la dérivation de ce système, se référer à Boyer et Fabrie [11] ou Chorin et Marsden [15].

Comme les fluides sont non-miscibles, on pourrait écrire un système pour chaque fluide, ce qui est une approche classique en dynamique multi-fluides. Il faudrait alors associer à ces deux systèmes les conditions de transmission suivantes, composées d'équations de continuité à la traversée de l'interface :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 \stackrel{\Sigma(t)}{=} \mathbf{u}_2, \\ [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1) - P_1 \mathcal{I}d] \mathbf{v}_{1 \rightarrow 2} \stackrel{\Sigma(t)}{=} [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_2) - P_2 \mathcal{I}d] \mathbf{v}_{1 \rightarrow 2}, \\ T_1 \stackrel{\Sigma(t)}{=} T_2, \\ \kappa_1 \nabla T_1 \cdot \mathbf{v}_{1 \rightarrow 2} \stackrel{\Sigma(t)}{=} \kappa_2 \nabla T_2 \cdot \mathbf{v}_{1 \rightarrow 2}, \end{cases}$$

le vecteur $\mathbf{v}_{1 \rightarrow 2}$ désignant la normale à l'interface $\Sigma(t)$ entre les deux fluides, orientée du fluide 1 vers le fluide 2. Le choix fait dans cette étude est différent et consiste à n'écrire qu'un seul ensemble d'équations régissant le mouvement des deux fluides. C'est pourquoi les variables sont dites ici **globales**. On verra plus loin comment « générer » certaines de ces variables à partir des variables d'état dans chaque fluide.

La différence entre le système (1.1) et le système que l'on utiliserait pour un écoulement mono-fluide est la première équation (de conservation des masses partielles) où intervient la variable Y_1 , qui représente la fraction massique du fluide 1. On utilise cette variable comme une fonction *couleur* qui caractérise le domaine $\Omega_1(t) \subset \Omega$ occupé par le fluide 1. En effet, lorsque les fluides 1 et 2 occupent initialement les domaines $\Omega_1(0)$ et $\Omega_2(0) = \Omega \setminus \Omega_1(0)$ en l'absence initiale de vide, avec $\emptyset \subsetneq \Omega_1(0) \subsetneq \Omega$, on associe la condition initiale suivante :

$$Y_1(t=0, \mathbf{x}) = Y^0(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1, & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_1(0), \\ 0, & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_2(0). \end{cases} \quad (1.2)$$

On cherche alors à étudier l'existence de solutions de la forme $Y_1(t, \mathbf{x}) = \mathbf{1}_{\Omega_1(t)}(\mathbf{x})$, de sorte que l'on ait les caractérisations :

$$\Omega_1(t) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : Y_1(t, \mathbf{x}) = 1\} \quad ; \quad \Omega_2(t) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : Y_1(t, \mathbf{x}) = 0\}. \quad (1.3)$$

Intuitivement, si ce système modélise correctement le phénomène physique souhaité, les deux fluides occupent des domaines disjoints à tout temps t et les fractions massiques prennent leurs valeurs dans l'ensemble fini $\{0, 1\}$, ce qui correspond bien à des fonctions caractéristiques de sous-domaines de l'espace.

L'idée à retenir des égalités (1.3) est que déterminer la fonction Y_1 en tant que solution d'une équation aux dérivées partielles est équivalent à déterminer la position des deux fluides pour tout temps.

Ici, Y_1 est discontinue en présence des deux fluides (sauts de 0 à 1 et de 1 à 0) et la surface de discontinuité coïncide avec l'interface $\Sigma(t)$ entre les deux fluides. À noter que **le système est symétrique par rapport aux variables Y_1 et Y_2** , les deux étant reliées par l'égalité $Y_1 + Y_2 = 1$. En revanche, sans l'hypothèse de non-miscibilité, il peut apparaître une zone de mélange, où les fractions massiques varient dans l'intervalle $]0, 1[$. La caractérisation (1.3) n'est alors plus valable, car le domaine où le fluide 1 est présent ne

correspond plus à l'isovaleur 1 de la variable Y_1 . Toutefois, même si la finalité est de traiter le cas des écoulements liquide/vapeur où il n'y a donc pas de mélange, il y a deux faits à garder à l'esprit :

- Lors des simulations, la diffusion numérique inhérente aux schémas de résolution introduit une zone de mélange (fictive), qu'il faut savoir traiter.
- D'autre part, d'un point de vue théorique, la présence d'une discontinuité change fondamentalement la nature du problème : en effet, si Y^0 est discontinue, la régularité est moindre que s'il existe une zone de transition entre 0 et 1. Dans le premier cas, on parle de solutions faibles, tandis que dans le second, on peut envisager de travailler dans des espaces fonctionnels plus réguliers, de type *Sobolev*. C'est pourquoi, dans une première approche, on s'intéresse à des données initiales régulières, pour lesquelles on dispose de résultats d'existence et d'unicité. Le but est alors d'appliquer ces résultats à des régularisations de données « bulles », en faisant tendre la taille de la zone de régularisation vers 0.

Concluons ce paragraphe en évoquant les autres variables. En effet, s'il est naturel de définir une vitesse globale, certaines grandeurs sont définies de manière propre à chaque fluide à l'aide de lois d'état ou de comportement, comme les coefficients thermodynamiques ou élastiques. Se reporter au paragraphe 5.2 pour plus de détails. Ces restrictions ne limitent cependant en rien la prise en compte de lois très générales.

1.1.2 Conditions aux limites et initiales

On complète le système par des conditions aux limites sur le bord du domaine, en interdisant tout déplacement ainsi que tout flux thermique sur la frontière :

$$\mathbf{u} \stackrel{\partial\Omega}{=} 0, \quad (1.4a)$$

$$\nabla T \cdot \boldsymbol{\nu} \stackrel{\partial\Omega}{=} 0, \quad (1.4b)$$

$\boldsymbol{\nu}$ étant la normale extérieure à $\partial\Omega$. À noter que l'opérateur $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$ fait intervenir des dérivées de \mathbf{u} d'ordre 2, ce qui justifie la condition d'adhérence forte $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0$ au lieu d'une condition de glissement.

Enfin, outre la condition (1.2) qui définit la position des deux fluides, on impose initialement une vitesse \mathbf{u}_0 , une température T_0 et une pression P_0 . Les autres variables sont déterminées à l'instant $t = 0$ par les lois d'état et de comportement.

1.2 ÉTABLISSEMENT DU MODÈLE

On décrit ici les transitions successives permettant d'aboutir à un modèle simplifié. Ce cheminement repose sur l'utilisation des propriétés physiques de l'écoulement, à commencer par un faible nombre de Mach. La première étape consiste à récrire le système (1.1) sous forme non conservative :

$$\begin{cases} D_t Y_1 = 0, \\ \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \rho D_t \mathbf{u} = -\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g}, \\ \rho c_p D_t T = \alpha T D_t P + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \boldsymbol{\sigma} :: \nabla \mathbf{u}, \end{cases} \quad (1.5)$$

où $D_t = \partial_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)$ est l'opérateur de dérivation lagrangienne, α le coefficient de compressibilité et c_p la capacité calorifique à pression constante, définis respectivement par :

$$\alpha = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P \quad \text{et} \quad c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_P \quad \text{où} \quad h = \varepsilon + P/\rho \text{ désigne l'enthalpie du système.}$$

Le passage de (1.1) à (1.5) est classique et repose sur l'utilisation de l'équation de conservation de la masse (cf. Annexe B). Le point complexe est la transition entre l'équation de conservation de l'énergie à l'équation sur la température, qui n'est possible que sous l'hypothèse suivante, qui n'est autre que la relation fondamentale de la thermodynamique :

Hypothèse 1

Le système admet une entropie $\mathcal{S}(\rho^{-1}, \varepsilon)$ strictement convexe, telle que $-T d\mathcal{S} = d\varepsilon + P d(\rho^{-1})$.

Le résultat découle de la manipulation des différentes variables et égalités thermodynamiques. Sous l'hypothèse que **l'on peut définir certaines grandeurs caractéristiques communes pour les deux fluides**, on peut adimensionner le système (1.5), tout en gardant à l'esprit le fait que les deux fluides peuvent avoir des propriétés très différentes. On suppose tout d'abord qu'il existe des valeurs caractéristiques U_* , t_* et L_* respectivement de la norme de la vitesse, de temps et de longueur vérifiant $L_* = U_* t_*$, ce qui revient à filtrer les ondes acoustiques du système (cf. Dellacherie [24]). On suppose également que P_* et T_* sont des valeurs représentatives de la pression et de la température pour les deux fluides. Certaines grandeurs cependant sont propres à chaque fluide comme α_k , $c_{p,k}$, ρ_k , κ_k et μ_k , pour lesquelles il existe des valeurs caractéristiques distinctes $\alpha_{*,k}$, $c_{p*,k}$, $\rho_{*,k}$, $\kappa_{*,k}$ et $\mu_{*,k}$. À partir de ces grandeurs caractéristiques, on peut définir des nombres sans dimension qui reflètent les propriétés des fluides tels que :

Nombre	<i>Mach</i>	<i>Reynolds</i>	<i>Prandtl</i>	<i>Froude</i>
Expression	$\mathcal{M}_{*,k} = \frac{U_*}{\sqrt{P_*/\rho_{*,k}}}$	$Re_{*,k} = \frac{U_* L_* \rho_{*,k}}{\mu_{*,k}}$	$Pr_{*,k} = \frac{\mu_{*,k} c_{p*,k}}{\kappa_{*,k}}$	$Fr_{*,k} = \frac{U_*^2}{L_* g}$

On introduit également le coefficient sans dimension $\beta_{*,k} = \frac{\alpha_{*,k} P_*}{\rho_{*,k} c_{p*,k}}$, à ne pas confondre

avec le coefficient thermoélastique $\hat{\beta} = \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial T}$.

On suppose enfin que l'on peut choisir $c_{p*,1}$ de sorte que soit vérifiée la relation :

$$\mathcal{M}_{*,1}^2 = \frac{U_*^2}{T_* c_{p*,1}}, \text{ soit } c_{p*,1} = \frac{T_*}{P_*} \rho_{*,1}.$$

En conservant les mêmes notations que précédemment pour les variables adimensionnées, on obtient formellement le système :

$$(1.6) \quad \begin{cases} D_t Y_1 = 0, & (1.6a) \\ \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, & (1.6b) \\ \rho D_t \mathbf{u} = -\frac{1}{\mathcal{M}_{*,1}^2} \nabla P + \frac{1}{Re_{*,1}} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \frac{\rho}{Fr_{*,1}} \mathbf{e}_3, & (1.6c) \\ \rho c_p D_t T = \beta_{*,1} \alpha T D_t P + \frac{\nabla \cdot (\kappa \nabla T)}{Re_{*,1} Pr_{*,1}} + \frac{\mathcal{M}_{*,1}^2}{Re_{*,1}} \boldsymbol{\sigma} :: \nabla \mathbf{u}. & (1.6d) \end{cases}$$

Le problème physique qui est considéré dans cette étude, à savoir le traitement des bulles dans les cœurs de réacteurs nucléaires, concerne des écoulements fortement subsoniques, ce qui se traduit par l'ordre de grandeur du nombre de Mach :

$$\boxed{\mathcal{M}_{*,1} \ll 1.}$$

Ce dernier point permet donc d'effectuer un **développement asymptotique** par rapport à la variable $\mathcal{M}_{*,1}$, les autres paramètres sans dimension étant supposés d'ordre 1. À noter que l'on pourrait faire un développement par rapport à $\mathcal{M}_{*,1}^2$, étant donné que seul le carré du nombre de Mach apparaît dans les équations (1.6).

Le but est d'obtenir un modèle d'écoulement très faiblement compressible, mais qui conserve des propriétés de la compressibilité, en particulier la présence d'effets thermiques importants. Ce raisonnement reprend les idées de *Majda* [59] et de *Embid* (cf. § 2.6) pour l'étude d'un système de combustion à plusieurs espèces.

On établit tout d'abord formellement la dépendance des variables par rapport au nombre de Mach. En premier lieu, on suppose que la fonction Y_1 se décompose sous la forme :

$$Y_1(t, \mathbf{x}) = Y_1^{(0)}(t, \mathbf{x}) + Y_1^{(1)}(t, \mathbf{x}, \mathcal{M}_{*,1}). \quad (1.7a)$$

De même, on effectue les développements :

$$\zeta(t, \mathbf{x}) = \zeta^{(0)}(t, \mathbf{x}) + \mathcal{M}_{*,1} \cdot \zeta^{(1)}(t, \mathbf{x}, \mathcal{M}_{*,1}) + \mathcal{M}_{*,1}^2 \cdot \zeta^{(2)}(t, \mathbf{x}, \mathcal{M}_{*,1}) + \mathcal{O}(\mathcal{M}_{*,1}^3), \quad (1.7b)$$

pour $\zeta \in \{\mathbf{u}, P, T\} \cup \{\rho, \kappa, \alpha, c_p, \mu, \lambda\}$. Toutefois, si l'on considère les variables thermodynamiques comme des fonctions de (Y_1, T, P) régulières (cf. § 5.2), les développements asymptotiques de Y_1, \mathbf{u}, P et T suffisent.

L'équation (1.6c) fournit immédiatement les relations suivantes, du fait de la singularité en $\mathcal{M}_{*,1}^2$:

$$\nabla P^{(0)} = 0 \quad \text{et} \quad \nabla P^{(1)} = 0,$$

ce qui implique : $P^{(0)} = P^{(0)}(t)$. Le niveau de référence pour la pression est donc homogène en espace, ce qui est classique dans les approches bas Mach.

On obtient par ailleurs à l'ordre 0 dans les trois autres équations du système (1.6) les relations :

$$\begin{cases} D_t^{(0)} Y_1^{(0)} = 0, \\ \partial_t \rho^{(0)} + \nabla \cdot (\rho^{(0)} \mathbf{u}^{(0)}) = 0, \\ \rho^{(0)} c_p^{(0)} D_t^{(0)} T^{(0)} = \beta_{*,1} \alpha^{(0)} T^{(0)} P^{(0)'} + \frac{\nabla \cdot (\kappa^{(0)} \nabla T^{(0)})}{Re_{*,1} Pr_{*,1}}, \end{cases} \quad (1.8a)$$

où $D_t^{(0)} = \partial_t + (\mathbf{u}^{(0)} \cdot \nabla)$. On revient ensuite à l'équation (1.6c). En utilisant la décomposition de Leray (cf. § 2.2) et le projecteur associé \mathcal{P} sur l'espace des champs à divergence nulle (et à trace nulle sur le bord), on obtient à partir de (1.6c) :

$$\mathcal{P} \left(\rho D_t \mathbf{u} - \frac{1}{Re_{*,1}} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \frac{\rho}{Fr_{*,1}} \mathbf{e}_3 \right) = 0.$$

En y insérant le développement asymptotique (1.7b), il vient à l'ordre 0 :

$$\mathcal{P} \left(\rho^{(0)} D_t^{(0)} \mathbf{u}^{(0)} - \frac{1}{Re_{*,1}} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(0)} + \frac{\rho^{(0)}}{Fr_{*,1}} \mathbf{e}_3 \right) = 0.$$

La projection sur l'espace des champs à divergence nulle étant nulle, on en déduit l'existence d'un champ de gradient de pression, dite **dynamique**,³ Π tel que :

$$\rho^{(0)} D_t^{(0)} \mathbf{u}^{(0)} = -\nabla \Pi + \frac{1}{Re_{*,1}} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(0)} - \frac{\rho^{(0)}}{Fr_{*,1}} \mathbf{e}_3. \quad (1.8b)$$

En toute rigueur, la pression dynamique Π est différente de la pression thermodynamique P , même si le développement asymptotique inséré directement dans l'équation (1.6c) fournit de manière formelle $\nabla \Pi = \nabla P^{(2)}$, à ceci près que le raisonnement que l'on a utilisé permet d'éliminer la dépendance de Π en $\mathcal{M}_{*,1}$.

On omet dans la suite et dans un souci de clarté les exposants $^{(0)}$. Le système dit DLMN (pour *Diphasic Low Mach Number*) obtenu à partir de (1.8) en revenant aux variables dimensionnées, est donc le suivant :

$$(1.9) \quad \begin{cases} D_t Y_1 = 0, & (1.9a) \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = \mathcal{G}_\theta, & (1.9b) \\ \rho D_t \mathbf{u} = -\nabla \Pi + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g}, & (1.9c) \\ \rho c_p D_t T = \alpha T P'(t) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T). & (1.9d) \end{cases}$$

C'est le modèle décrit dans [24]. L'équation (1.9b) est une reformulation de la loi de conservation de la masse, avec :

$$\mathcal{G}_\theta = -\frac{D_t \rho}{\rho}.$$

Cette nouvelle expression permet de souligner que la divergence du champ de vitesse est non nulle, ce qui rappelle qu'en dépit d'un nombre de Mach très faible, l'écoulement considéré est encore compressible.

³ Le champ Π est proche de celui que l'on obtiendrait en incompressible. Le découplage (P, Π) contribue au filtrage des ondes acoustiques.

Ce choix a de nombreuses conséquences, qui seront détaillées dans la suite (changement de variables principales, découplage avec d'autres équations, ...).

Les inconnues du système (1.9), tel qu'il a été établi initialement, sont Y_1 , T , P , \mathbf{u} et $\nabla\Pi$. Pour déterminer les autres variables, on considère le vecteur $\boldsymbol{\theta} = (Y_1, T, P)$ dont ces variables sont supposées dépendre continûment (cf. § 5.2).

On propose toutefois une autre expression de l'équation (1.9c), en remarquant que le tenseur de contraintes est fonction de \mathbf{u} . On décompose $\boldsymbol{\sigma}$ de manière orthogonale (pour le produit scalaire matriciel usuel) :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \left(D(\mathbf{u}) - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathcal{I}d \right) + \vartheta(\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathcal{I}d, \quad (1.10)$$

où l'on a introduit le paramètre $\vartheta = (3\lambda + 2\mu)/3$.⁴ En utilisant l'expression (1.10) du tenseur $\boldsymbol{\sigma}$, afin de faire apparaître explicitement le champ de vitesse \mathbf{u} , il vient à l'ordre 0 :

$$\rho^{(0)} D_t^{(0)} \mathbf{u}^{(0)} = -\nabla\pi + \frac{2}{Re_{*,1}} \nabla \cdot \left[\mu^{(0)} D(\mathbf{u}^{(0)}) \right] - \frac{\rho^{(0)}}{Fr_{*,1}} \mathbf{e}_3,$$

où désormais seul μ intervient encore, le paramètre λ ayant été intégré dans le terme $\nabla\pi$ suite à l'étape de projection. La pression dynamique Π du système initial (1.9) n'est donc pas rigoureusement égale à la pression π du nouveau système. C'est ce dernier champ que nous utiliserons dans cette étude, du fait de la simplification des autres termes ($\boldsymbol{\sigma}$ n'apparaît plus dans la nouvelle formulation).

Le modèle étudié prend donc la forme suivante, à ce stade du processus de construction :

$$(1.11) \quad \begin{cases} D_t Y_1 = 0, & (1.11a) \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = \mathcal{G}_\theta, & (1.11b) \\ \rho D_t \mathbf{u} = -\nabla\pi + 2\nabla \cdot [\mu D(\mathbf{u})] + \rho \mathbf{g}, & (1.11c) \\ \rho c_p D_t T = \alpha T P'(t) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T). & (1.11d) \end{cases}$$

Le système DLMN a été établi originellement sous la forme (1.9) mais nous l'étudierons dans la suite sous cette nouvelle forme (1.11), cette dernière permettant un certain nombre de simplifications, en particulier dans le cas où le module de cisaillement μ est constant.

En s'interrogeant sur le **gain de l'approche bas Mach**, on constate que, par rapport à la forme non conservative (1.5) des équations de Navier-Stokes, le développement asymptotique a permis d'éliminer l'influence du tenseur de contraintes dans l'équation sur la température, et que l'on a découplé les différentes contributions de pression, avec une variable thermodynamique P qui n'est plus fonction que du temps, et une variable dynamique π . Un autre aspect fondamental est le filtrage des ondes acoustiques : on ne conserve plus qu'une seule échelle de temps et d'espace. Enfin, on a fait disparaître le tenseur de contraintes, en ne prenant plus en compte que la contribution de μ . Comme nous le verrons dans la suite, ces apports simplifient certains calculs dans la construction d'une solution classique.

⁴ $\vartheta = 0$ pour un gaz monoatomique.

Il faut cependant souligner que le système n'est pas complet sous cette forme, puisqu'il manque une équation pour déterminer les inconnues $(Y_1, T, P, \mathbf{u}, \nabla\pi)$, même si la dernière équation est implicitement contenue dans ce système, *via* des considérations mathématiques. Dans le système (1.15), le terme source \mathcal{G}_θ peut encore s'exprimer sous la forme :

$$\mathcal{G}_\theta(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{\Gamma} \frac{P'(t)}{P(t)} + \frac{\beta \nabla \cdot (\kappa \nabla T)}{P(t)}, \quad (1.12)$$

où l'on utilise les notations :

$$\beta = \frac{\alpha P}{\rho c_p} \quad \text{et} \quad \Gamma = \frac{\rho c^2}{P} \quad \text{avec} \quad c = \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T - \frac{\alpha^2 T}{c_p} \right]^{-1/2}.$$

La variable c désigne ici la **vitesse du son** (cf. Annexe B pour la dérivation de cette formule). L'expression (1.12) n'est valable que sous l'**hypothèse 1**, qui assure la stricte positivité de la quantité sous la racine.

On sait par ailleurs qu'une condition nécessaire et suffisante d'existence de la solution ϕ de (1.15) est (cf. Courant et Hilbert [21] par exemple) :

$$\int_{\Omega} \mathcal{G}_\theta(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0. \quad (1.13)$$

L'égalité (1.13) appliquée à l'expression (1.12) fournit l'équation permettant de déterminer P , à savoir :

$$P'(t) = \frac{\int_{\Omega} \beta(Y_1, T, P) \nabla \cdot (\kappa \nabla T) \, d\mathbf{x}}{\int_{\Omega} \frac{1}{\Gamma(Y_1, T, P)} \, d\mathbf{x}}. \quad (1.14)$$

On introduit finalement la fonctionnelle :

$$\mathcal{H}_\theta(t) = \frac{\int_{\Omega} \beta(\theta) \nabla \cdot [\kappa(\theta) \nabla T] \, d\mathbf{x}}{\int_{\Omega} \frac{1}{\Gamma(\theta)} \, d\mathbf{x}},$$

de sorte que $P'(t) = \mathcal{H}_\theta(t)$. Ceci met en valeur l'importance du coefficient β , qui influe sur les variations de la pression. En particulier, lorsque β est constant, compte-tenu des conditions aux limites sur le bord du domaine et sur l'interface, on obtient $P'(t) = 0$. Dans les autres cas, on constate que le gradient de température détermine la pression, montrant l'aspect encore compressible de notre modèle, qui, avec cette dernière équation, est désormais clos.

1.3 REFORMULATION

Le système DLMN tel qu'il sera étudié dans la suite correspond aux quatre équations du système (1.11), en plus de l'équation (1.14) sur la pression. Les inconnues sont la fraction massique Y_1 , la température T , la pression thermodynamique P , la pression dynamique π et la vitesse \mathbf{u} . On peut toutefois reformuler le système, en considérant deux variables de vitesse $(\mathbf{w}, \nabla\phi)$ grâce à la décomposition de Leray. Cette nouvelle forme permettra d'introduire par la suite un modèle pour les écoulements potentiels à bas Mach.

1.3.1 Décomposition du système

Repartons du système (1.9) établi initialement dans [24]. La décomposition de Leray (cf. § 2.2) permet d'écrire le champ de vitesse sous la forme $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \nabla\phi$, avec $\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$ et $\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\nu}|_{\partial\Omega} = 0$. Les égalités (1.9b-1.9c) couplées à la condition aux limites (1.4a) se décomposent alors en deux sous-systèmes, à savoir un système elliptique sur le potentiel ϕ :

$$\begin{cases} \Delta\phi \stackrel{\Omega}{\equiv} \mathcal{G}_\theta, \\ \nabla\phi \cdot \boldsymbol{\nu} \stackrel{\partial\Omega}{\equiv} 0, \end{cases} \quad (1.15)$$

et un système de type Navier-Stokes incompressible linéarisé pour la partie solénoïdale :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{w} \stackrel{\Omega}{\equiv} 0, \\ \rho D_t \mathbf{w} \stackrel{\Omega}{\equiv} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \nabla\Pi + \rho\mathbf{g} - \rho D_t \nabla\phi, \\ \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\nu} \stackrel{\partial\Omega}{\equiv} 0, \quad \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\tau} \stackrel{\partial\Omega}{\equiv} -\nabla\phi \cdot \boldsymbol{\tau}. \end{cases} \quad (1.16)$$

La variable $\boldsymbol{\tau}$ désigne ici le vecteur tangent à la frontière (en 2D) ou une base de vecteurs tangents (en 3D). Si l'on utilise la nouvelle formulation (1.11c) plutôt que (1.9c), la partie « incompressible » s'écrit :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{w} \stackrel{\Omega}{\equiv} 0, \\ \rho D_t \mathbf{w} \stackrel{\Omega}{\equiv} 2\nabla \cdot [\mu D(\mathbf{w})] - \nabla\pi + \rho\mathbf{g} + 2\nabla \cdot [\mu \text{Hess}(\phi)] - \rho D_t \nabla\phi, \\ \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\nu} \stackrel{\partial\Omega}{\equiv} 0, \quad \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\tau} \stackrel{\partial\Omega}{\equiv} -\nabla\phi \cdot \boldsymbol{\tau}. \end{cases} \quad (1.16')$$

Pour comparer avec (1.16), on remarque que le tenseur de contraintes s'écrit, avec la décomposition de Leray :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \left(D(\mathbf{w}) + \text{Hess}(\phi) - \frac{1}{3}(\Delta\phi) \mathcal{I}d \right) + \frac{\vartheta}{3}(\Delta\phi) \mathcal{I}d,$$

où $\text{Hess}(\phi)$ désigne la matrice hessienne de ϕ . On retrouve donc le fait que l'on a fait disparaître le coefficient λ *via* l'étape de projection.

1.3.2 Cas particulier à μ constant

Lorsque le module de cisaillement μ est une constante (sans hypothèse particulière sur λ , qui n'intervient plus explicitement), le système prend une forme plus simple. En conservant l'équation (1.11c), on aurait :

$$\rho D_t \mathbf{u} \stackrel{\Omega}{\equiv} \mu \Delta \mathbf{u} - \nabla\pi + \rho\mathbf{g} + \mu \nabla \mathcal{G}_\theta,$$

en utilisant le fait que $2\nabla \cdot D(\mathbf{u}) = \Delta \mathbf{u} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$. Cependant, si on prend en compte cette hypothèse en amont dans le processus (*i.e.* avant projection de Leray), on n'obtient pas cette formulation. En effet, la divergence du tenseur de contraintes, donné par (1.10), vaut :⁵

⁵ cf. Annexe A.1 pour les détails calculatoires.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \mu [\Delta \mathbf{u} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})] + \nabla(\lambda \nabla \cdot \mathbf{u}) = \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla[(\mu + \lambda) \nabla \cdot \mathbf{u}], \\ &= \mu \Delta \mathbf{w} + \nabla[(2\mu + \lambda) \Delta \phi].\end{aligned}$$

Il s'ensuit alors que l'équation (1.11c) est remplacée par :

$$\rho D_t \mathbf{u} \stackrel{\Omega}{=} \mu \Delta \mathbf{u} - \nabla \pi + \rho \mathbf{g}, \quad (1.11c')$$

par intégration dans $\nabla \pi$ du terme de gradient de $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$, alors que la partie solénoïdale (1.16') du système DLMN prend la forme :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{w} \stackrel{\Omega}{=} 0, \\ \rho D_t \mathbf{w} \stackrel{\Omega}{=} \mu \Delta \mathbf{w} - \nabla \pi + \rho \mathbf{g} - \rho D_t \nabla \phi, \\ \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\nu} \stackrel{\partial \Omega}{=} 0, \quad \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\tau} \stackrel{\partial \Omega}{=} -\nabla \phi \cdot \boldsymbol{\tau}. \end{cases} \quad (1.16'')$$

L'avantage de cette dernière équation est de **ne faire intervenir qu'un opérateur d'ordre 2** par rapport à ϕ , alors que dans les autres formulations (1.16,1.16') interviennent des dérivées jusqu'à l'ordre 3.

1.3.3 Le système complet

Le système DLMN sera considéré dans la suite sous **deux formes (équivalentes)** :

- une **forme compacte à 5 inconnues** (et donc 5 équations) qui est donnée par (1.11), avec pour équation sur la vitesse (1.11c) (ou (1.11c') si μ est constant), complétée par l'équation (1.14) qui détermine P , et par les conditions de bord (1.4a) pour la vitesse et (1.4b) pour la température. Le champ de vitesse y apparaît sous sa forme générale \mathbf{u} .
- une **forme découplée à 6 inconnues** (et donc 6 équations), qui comprend les équations (1.11a) et (1.11d) pour l'évolution de la fraction massique et de la température, (1.15) pour le potentiel, (1.16') (ou (1.16'')) si μ est constant) pour la partie solénoïdale et (1.14) pour la pression. On conserve la condition aux limites (1.4b) pour T , les conditions aux limites pour \mathbf{w} et $\nabla \phi$ étant incluses dans (1.15) et (1.16').

On obtient donc un système clos à cinq (resp. six) inconnues : $Y_1, T, P, \mathbf{u}, \nabla \pi$ (resp. $Y_1, T, P, \mathbf{w}, \nabla \phi, \nabla \pi$). Les variables annexes ρ et ε sont déterminées par des lois d'état en fonction de (Y_1, T, P) , μ et κ par des lois de comportement, puis α, β, Γ et c_p par les relations thermodynamiques. Les deux formulations seront utilisées dans la suite, en particulier dans la preuve d'existence et d'unicité en temps court d'une solution régulière (cf. Ch.5).

Quant aux conditions initiales que l'on associe au système sous sa forme à 5 équations, on impose comme précisé dans le paragraphe 1.1.2 :

$$\begin{cases} Y_1(0, \mathbf{x}) = Y_1^0(\mathbf{x}), \\ T(0, \mathbf{x}) = T_0(\mathbf{x}), \\ P(0, \mathbf{x}) = p_0, \\ \mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \text{ avec } \nabla \cdot \mathbf{u}_0 = \mathcal{G}_{\theta_0}. \end{cases} \quad (1.17)$$

On a noté ici $\theta_0 = (Y_1^0, T_0, p_0)$. Même si dans le chapitre 5, Y_1^0 est supposée régulière, on rappelle que la finalité est de traiter une condition initiale du type (1.2). On suppose de plus que **toutes les données initiales vérifient les différentes conditions aux limites**.

Le système DLMN comporte donc une équation d'advection (hyperbolique) sur Y_1 , une équation différentielle ordinaire sur la pression, une première équation elliptique non homogène sur la vitesse, et enfin deux équations non-linéaires d'advection-diffusion sur la vitesse et sur la température. La non-linéarité est toutefois fondamentalement différente entre les équations (1.11c) et (1.11d). Dans la première, elle provient du terme classique $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$, tandis que pour la seconde, elle résulte de la dépendance de tous les coefficients de l'équation par rapport à T . Ce sont ces coefficients qui engendrent le couplage entre (1.11a), (1.11d) et (1.14). Le couplage entre (1.11c) et les autres équations se fait par la **présence du champ \mathbf{u} dans l'opérateur lagrangien D_t** .

Lorsque l'on considère la formulation à 6 équations, la dernière condition dans (1.17) se récrit :

$$\mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{w}_0(\mathbf{x}) + \nabla\phi_0(\mathbf{x}), \quad \text{avec } \nabla \cdot \mathbf{w}_0 = 0 \quad \text{et} \quad \Delta\phi_0 = \mathcal{G}_{\theta_0}(0, \mathbf{x}).$$

Ces deux dernières conditions sont nécessaires pour assurer la compatibilité avec les EDPs elliptiques (stationnaires, donc en particulier vraies à l'instant 0). Dans cette formulation, on conserve les équations d'advection (elliptique) et d'advection-diffusion (parabolique) respectivement sur Y_1 et T ainsi que l'EDO sur P , auxquelles on ajoute une équation de Poisson (elliptique) sur le potentiel et un système de type Navier-Stokes « linéaire » sur la partie à divergence nulle. Gardons cependant à l'esprit que c'est le champ de vitesse complet \mathbf{u} qui apparaît dans l'opérateur D_t ; c'est pourquoi la « linéarité » n'est que fictive, \mathbf{w} apparaissant implicitement dans le terme d'advection.

Les couplages restent donc ici complexes et suggèrent de simplifier le problème dans le cadre d'études préliminaires.

1.4 SYSTÈMES DÉRIVÉS

On introduit ci-dessous des hypothèses simplificatrices afin d'atténuer les effets des couplages et des non-linéarités. Le but n'est cependant pas d'affaiblir la portée physique de l'étude, mais d'étudier les caractéristiques mathématiques du problème à travers des modèles simplifiés, en insistant sur les points communs et sur les moyens de « remonter » jusqu'au modèle d'origine. Ces modèles simplifiés ont été introduits dans [25].

Une première hypothèse, courante en mécanique des fluides, est de supposer le champ de vitesse potentiel, *i.e.* $w = 0$ et $u = \nabla\phi$. Cette hypothèse est toujours réalisée en dimension 1, mais pas en dimensions supérieures. C'est une simplification avant tout mathématique, mais qui peut trouver des justifications dans certaines configurations, comme dans le cas des fluides parfaits initialement irrotationnels (qui le restent pour tout temps, voir Chorin et Marsden [15, § 1.2] par exemple).

Le système résultant (dit **DLMN-potentiel**) peut être décomposé entre deux sous-systèmes, à savoir :

$$\begin{cases} \partial_t Y_1 + \nabla\phi \cdot \nabla Y_1 = 0, \\ Y_1(0, \mathbf{x}) = Y_1^0(\mathbf{x}), \\ \Delta\phi = \mathcal{G}_\theta, \\ \nabla\phi \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (1.18a)$$

et :

$$\begin{cases} \rho c_p (\partial_t T + \nabla\phi \cdot \nabla T) = \alpha T P'(t) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T), \\ P'(t) = \mathcal{H}_\theta(t). \end{cases} \quad (1.18b)$$

La simplification apportée en supposant le champ de vitesse potentiel a plusieurs conséquences. En premier lieu, elle permet de ne plus tenir compte de l'équation non linéaire (1.11c), et ainsi d'avoir une inconnue de moins (π). De plus, alors que le système (1.11) était d'ordre 2 par rapport à la variable vectorielle u , le système (1.18) est d'ordre 2 par rapport à la variable scalaire ϕ . La condition d'adhérence (1.4a) est donc trop forte et elle est remplacée par la condition de glissement dans (1.18a).

La première partie (1.18a) du système DLMN-potentiel est un couplage hyperbolique - elliptique, mais les variables $(Y_1, \nabla\phi)$ sont encore reliées, *via* le second membre \mathcal{G}_θ , au couple (T, P) déterminé par la partie (1.18b). Pour étudier spécifiquement ce couplage hyperbolique - elliptique, on modifie le second membre de l'équation de Poisson pour supprimer la dépendance en (T, P) . Ce nouveau second membre est choisi de façon à ne dépendre que de Y_1 et à vérifier la condition de moyenne nulle. Le choix effectué dans [25, 27] est une projection de Y_1 sur l'espace des fonctions à moyenne nulle, pondérée par une pulsation. Le nouveau modèle, appelé modèle **abstrait de vibration de bulles** (ABV), a pour formulation :

$$\begin{cases} \partial_t Y_1 + \nabla\phi \cdot \nabla Y_1 = 0, \\ Y_1(0, \mathbf{x}) = Y_1^0(\mathbf{x}), \\ \Delta\phi = \psi(t) \left(Y_1(t, \mathbf{x}) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y_1(t, \mathbf{x}') \, d\mathbf{x}' \right), \\ \nabla\phi \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

ψ étant une fonction donnée de classe $\mathcal{C}^\infty([0, +\infty[)$.

D'autres choix non linéaires auraient pu être faits, mais malgré le caractère arbitraire et simple de ce nouveau terme, les résultats obtenus révèlent des propriétés intéressantes. Ce système fait l'objet d'études théoriques et numériques, détaillées dans la partie II. Par analogie avec le système DLMN, on pose :

$$\mathcal{G}_{Y_1}(t, \mathbf{x}) = \psi(t) \left(Y_1(t, \mathbf{x}) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y_1(t, \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right),$$

de sorte que $\Delta\phi = \mathcal{G}_{Y_1}$.

1.5 BILAN

On résume sur la figure 1.1, page 25, les transitions entre les différents modèles évoqués précédemment. On précise également l'état de l'art sur ces différents systèmes, ainsi que les paragraphes qui s'y réfèrent.

On a ainsi construit puis exprimé sous différentes formes un système non-linéaire d'équations aux dérivées partielles d'ordre 2, permettant de traiter le comportement de bulles tout en tenant compte des propriétés physiques de l'écoulement (domaine borné, nombre de Mach très faible). Les équations qui apparaissent dans ce système sont classiques (advection, advection-diffusion, Poisson) mais leur couplage est le cœur des problèmes mathématiques qui se posent, en particulier pour l'étude de l'existence et/ou de l'unicité de solutions. C'est pour cela que l'on introduit des systèmes annexes, plus simples mais conservant autant de propriétés du système principal que possible. L'étude théorique et numérique du modèle ABV fait l'objet de la partie II. Fort de cette étude, on analyse ensuite le système DLMN dans la partie III.

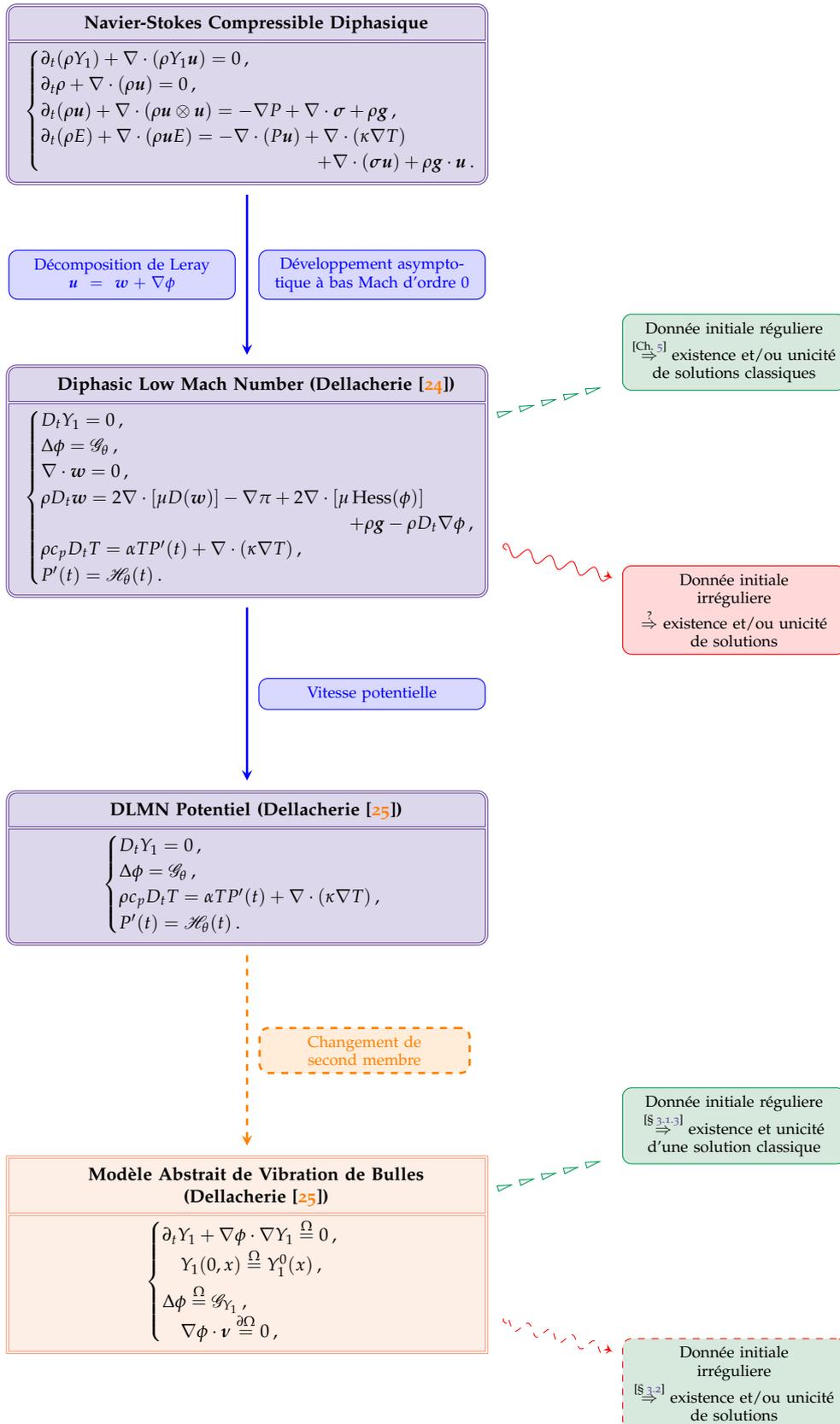


FIG. 1.1 – Arbre généalogique des systèmes étudiés dans ce document

OUTILS MATHÉMATIQUES

2

SOMMAIRE

2.1	ESPACES DE SOBOLEV	28
2.2	DÉCOMPOSITION DE LERAY	30
2.3	LEMMES PRÉLIMINAIRES	31
2.4	MÉTHODE DES CARACTÉRISTIQUES	36
2.5	ESTIMATIONS D'ÉNERGIE ET RÉSULTATS D'EXISTENCE	40
2.5.1	Equations de transport	41
2.5.2	Équations d'advection-diffusion	47
2.5.3	Équations elliptiques	55
2.5.4	Système de Navier-Stokes incompressible linéarisé	57
2.6	COMBUSTION À BAS MACH	61
2.6.1	Modèle	62
2.6.2	Théorème d'existence et d'unicité pour le modèle de combustion	66
2.6.3	Régions invariantes	68
2.7	BILAN	70

SE CHAPITRE est consacré aux résultats d'analyse fonctionnelle que l'on utilise dans les preuves d'existence et d'unicité de solutions des systèmes DLMN et ABV. Il contient en particulier des résultats sur les espaces fonctionnels utilisés, ainsi que sur trois grandes familles d'EDPs récurrentes dans cette étude, à savoir les équations d'advection, d'advection-diffusion et elliptiques de type Poisson. Tous les résultats de ce chapitre sont connus et référencés dans la littérature. Cependant, on donne pour certains des démonstrations modifiées afin d'améliorer leur précision, en particulier en ce qui concerne les estimations d'énergie.

Ce chapitre comprend également les fondements de la méthode des caractéristiques, qui sera utilisée dans le cadre de l'étude du modèle ABV. On termine par un résumé des travaux de *Embid* sur la combustion lente, qui ont largement inspiré la présente étude.

Comme précisé dans la liste des symboles au début de ce mémoire, on utilise la notation nabla (∇) pour désigner les opérateurs différentiels usuels, à savoir $\nabla \star$ pour le gradient ou la matrice jacobienne, $\nabla \cdot \star$ pour la divergence et $\nabla \wedge \star$ pour le rotationnel.

2.1 ESPACES DE SOBOLEV

On redonne ici les définitions d'espaces de Sobolev dans le cas classique des indices quelconques dans \mathbb{R}^d , mais aussi pour des domaines Ω bornés (réguliers). Pour plus de détails, se référer à Egorov et Shubin [33].

L'espace $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, désigne l'ensemble des fonctions infiniment dérivables sur Ω et à support compact. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est l'espace de Schwarz des fonctions infiniment dérivables à décroissance rapide. Son dual est l'espace des distributions tempérées et est noté $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Définition 2.1 (Indices quelconques dans \mathbb{R}^d)

Soit $s \in \mathbb{R}$. On définit l'espace de Sobolev $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$ comme l'ensemble des distributions $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ vérifiant $(1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d)$, où \hat{f} désigne la transformée de Fourier de la distribution f .

L'espace $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$ peut de manière équivalente être défini comme l'adhérence de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ pour la norme :

$$\|f\|_{s, \mathbb{R}^d, \mathcal{F}}^2 = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Ceci définit un espace de Hilbert pour tout s réel.

Pour tout $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, on peut également construire les espaces de Sobolev pour des indices entiers naturels :

Définition 2.2 (Indices entiers dans un domaine quelconque)

Soit $m \in \mathbb{N}$. On définit l'espace de Sobolev $\mathcal{H}^m(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions $f \in L^2(\Omega)$ telles que $D^\zeta f \in L^2(\Omega)$ pour tout multi-indice $\zeta \in \mathbb{N}^d$ vérifiant $|\zeta| \leq m$.

Dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^d$ et $s \in \mathbb{N}$, les deux définitions coïncident. Par ailleurs, on vérifie que l'espace $\mathcal{H}^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle_{m, \Omega} = \sum_{|\zeta| \leq m} \int_{\Omega} D^\zeta f(x) \cdot D^\zeta g(x) dx.$$

La norme associée (qui est équivalente à $\|\cdot\|_{m, \mathbb{R}^d, \mathcal{F}}$ lorsque $\Omega = \mathbb{R}^d$) est donc :

$$\|f\|_{m, \Omega}^2 = \sum_{|\zeta| \leq m} \int_{\Omega} |D^\zeta f(x)|^2 dx.$$

On définit enfin les espaces de Sobolev pour des indices quelconques et des domaines quelconques (bornés réguliers) par un processus de quotients :

Définition 2.3 (Indices et domaines quelconques)

Pour $s \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\mathcal{H}^s(\Omega) = \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d) / \left\{ f \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d) : f|_{\Omega} = 0 \right\}.$$

La norme associée à cet espace ainsi construit est naturellement :

$$\|f\|_{s,\Omega} = \inf \left\{ \|\tilde{f}\|_{s,\mathbb{R}^d,\mathcal{F}} : \tilde{f} \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d), \tilde{f}|_{\Omega} = f \right\}.$$

À noter que ces espaces peuvent être définis autrement dans le cas $s \in \mathbb{R}_+$ (principe d'invariance par difféomorphisme). On dit que $f \in \mathcal{H}^s(\Omega)$ si $f \in \mathcal{H}^{[s]}(\Omega)$ et si la quantité :

$$\iint_{\Omega} \sum_{|\zeta|=|s|} \frac{|D^{\zeta} f(\mathbf{y}) - D^{\zeta} f(\mathbf{x})|^2}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^{d+2(s-[s])}} \, d\mathbf{x}d\mathbf{y}$$

est finie. On peut ensuite généraliser ces définitions aux espaces $W^{s,p}(\Omega)$ pour $s \in \mathbb{R}$ et $p \geq 1$.

On donne ensuite quelques définitions annexes. La première concerne les espaces $\mathcal{H}^{m-1/2}$ et découle de la proposition suivante :

Proposition 2.1

Soient Ω un ouvert borné régulier et $m \in \mathbb{N}$. L'application :

$$\gamma : \begin{cases} \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{H}^m(\Omega) & \longmapsto \mathcal{C}^0(\partial\Omega) \\ f & \longrightarrow f|_{\partial\Omega} \end{cases}$$

se prolonge en une application (toujours notée γ) continue sur $\mathcal{H}^m(\Omega)$. L'image de $\mathcal{H}^m(\Omega)$ par γ est notée $\mathcal{H}^{m-1/2}(\partial\Omega)$.

On s'intéresse ensuite aux espaces de fonctions à trace nulle :

Définition 2.4

L'espace $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ est défini par :

$$\mathcal{H}_0^1(\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{H}^1(\Omega) : \gamma(f) = 0 \right\}.$$

Il peut être défini, de manière équivalente, comme l'adhérence de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ pour la norme de \mathcal{H}^1 .

On rappelle enfin un résultat d'injection :

Théorème 2.1

On a l'injection compacte $\mathcal{H}^s(\Omega) \subset \mathcal{C}_b^k(\Omega)$ pour tout $s > \frac{d}{2} + k$, où $\mathcal{C}_b^k(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions dérivables à l'ordre k , bornées et dont les dérivées (jusqu'à l'ordre k) sont bornées.

2.2 DÉCOMPOSITION DE LERAY

On introduit dans cette partie un outil fondamental pour le traitement des systèmes différentiels qui vont suivre. Cette décomposition prend également dans la littérature les noms de *Hodge* ou encore de *Helmholtz*. On se réfère ici au chapitre 2 dans Boyer et Fabrie [11]. La théorie est détaillée dans le cadre de la dimension 2 mais se généralise à des dimensions supérieures (le cas de la dimension 1 est trivial). En particulier, ces résultats sont utilisés en mécanique des fluides pour décomposer tout champ de vitesse en une composante incompressible et un champ de gradients.

Soit Ω un ouvert borné lipschitzien de \mathbb{R}^2 de normale extérieure ν .

Lemme 2.1

On définit l'espace :

$$E(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^2 : \nabla \cdot \mathbf{u} \in L^2(\Omega) \right\},$$

que l'on munit de la norme : $\|\mathbf{u}\|_E = \sqrt{\|\mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2 + \|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2}$. Alors $(\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}))^2$ est dense dans $E(\Omega)$.

Ce lemme permet de construire une application trace (normale) sur cet espace.

Proposition 2.2

1. L'application γ_ν qui à $\mathbf{u} \in (\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}))^2$ associe $(\mathbf{u} \cdot \nu)|_{\partial\Omega}$ se prolonge en une application linéaire continue de $E(\Omega)$ dans $\mathcal{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$.
2. Soit $E_0(\Omega)$ l'adhérence de $(\mathcal{C}_0^\infty(\Omega))^2$ dans $E(\Omega)$. Alors :

$$E_0(\Omega) = \ker(\gamma_\nu).$$

On définit ensuite l'espace :

$$V = \left\{ \boldsymbol{\varphi} \in (\mathcal{D}(\Omega))^2 : \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} = 0 \right\},$$

ainsi que ses adhérences \mathcal{W} dans $(L^2(\Omega))^2$ et \mathcal{V} dans $(\mathcal{H}_0^1(\Omega))^2$.

Théorème 2.2

On suppose Ω connexe. On a alors la décomposition suivante, dite de **Leray** :

$$(L^2(\Omega))^2 = \mathcal{W} \oplus \mathcal{W}^\perp,$$

avec les caractérisations :

$$\mathcal{W} = \left\{ \mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^2 : \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \gamma_\nu(\mathbf{u}) = 0 \right\}$$

et :

$$\mathcal{W}^\perp = \left\{ \mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^2 : \exists p \in \mathcal{H}^1(\Omega), \mathbf{u} = \nabla p \right\}.$$

On a également la caractérisation suivante de \mathcal{V} :

$$\mathcal{V} = \left\{ \mathbf{v} \in (\mathcal{H}_0^1(\Omega))^2 : \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \right\}.$$

On associe à la décomposition de Leray $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \nabla p$ les projecteurs orthogonaux \mathcal{P} et \mathcal{Q} définis par : $\mathcal{P}\mathbf{u} = \mathbf{w}$ et $\mathcal{Q}\mathbf{u} = \nabla p$.

2.3 LEMMES PRÉLIMINAIRES

On rappelle ici certains résultats classiques d'analyse fonctionnelle dans les espaces de Sobolev définis précédemment, et leur application à des espaces fonctionnels composés, qui s'imposent naturellement au cours de la démonstration. En effet, compte-tenu des estimations d'énergie qui découlent des équations du système, on est amené à introduire les espaces suivants :

- $\mathcal{W}_{s,\mathcal{T}}(\Omega) = \mathcal{C}^0([0, \mathcal{T}], L^2(\Omega)) \cap L^\infty([0, \mathcal{T}], \mathcal{H}^s(\Omega))$;
- $\mathcal{X}_{s,\mathcal{T}}(\Omega) = \mathcal{W}_{s,\mathcal{T}}(\Omega) \cap L^2([0, \mathcal{T}], \mathcal{H}^{s+1}(\Omega))$;

On souhaite traiter le cas où Ω est un domaine borné régulier de \mathbb{R}^d , $d \in \{1, 2, 3\}$. En pratique, pour le système DLMN, on s'intéresse au cas des conditions aux limites périodiques en prenant $\Omega = \mathbb{T}^d$. Dans la définition des espaces, on prend $\mathcal{T} > 0$ et $s \in \mathbb{R}_+$.

L'espace $\mathcal{C}^0([0, \mathcal{T}], L^2(\Omega))$ permet, d'une part, d'obtenir une solution classique par un jeu d'inclusion (cf. **Corollaire 2.1**), et, d'autre part, de fournir une convergence forte via le théorème d'*Arzela-Ascoli* dans la preuve d'existence et d'unicité de la solution classique d'une équation d'advection-diffusion. Une convergence faible- \star est assurée dans l'espace $L^\infty([0, \mathcal{T}], \mathcal{H}^s(\Omega))$. Le dernier espace qui intervient ici, à savoir $L^2([0, \mathcal{T}], \mathcal{H}^{s+1}(\Omega))$, est nécessaire pour assurer l'existence des seconds membres dans les estimations d'énergie.

Les espaces $\mathcal{W}_{s,\mathcal{T}}(\Omega)$ et $\mathcal{X}_{s,\mathcal{T}}(\Omega)$ sont respectivement munis des normes suivantes :

- $\|f\|_{s,\mathcal{T}} = \sup_{t \in [0, \mathcal{T}]} \|f(t, \cdot)\|_s^2,$
- $\|f\|_{s,\mathcal{T}}^2 = \|f\|_{s,\mathcal{T}}^2 + \int_0^{\mathcal{T}} \|\nabla f(t, \cdot)\|_s^2 dt,$

ce qui leur confère la structure d'**espaces de Banach**.

On note également e_j le j -ème vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^d , i.e. :

$$e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0).$$

Enfin, pour ne pas allourdir les notations, on ne distinguera pas dans la suite les espaces $\mathbf{X}(\Omega)$ (pour les variables scalaires) et $(\mathbf{X}(\Omega))^d$ (pour les variables vectorielles), que l'on notera parfois même \mathbf{X} , en l'absence de confusions possibles sur le domaine spatial concerné.

Commençons par caractériser l'espace $\mathcal{W}_{s,\mathcal{T}}(\Omega)$.

Lemme 2.2 (Lemme A.1, [27])

Pour $s > 1$, l'espace $\mathcal{W}_{s,\mathcal{T}}(\Omega)$ s'injecte continûment dans $\mathcal{C}^0([0, \mathcal{T}], \mathcal{H}^{s'}(\Omega))$ pour tout $s' \in [0, s[$.

Corollaire 2.1 (Lemme 2.1, [27])

Pour $s > \frac{d}{2}$, l'espace $\mathcal{W}_{s,\mathcal{T}}(\Omega)$ s'injecte continûment dans $\mathcal{C}^0([0, \mathcal{T}] \times \bar{\Omega})$.

On rappelle ensuite le résultat fondamental des inégalités de Moser, qui fournit des propriétés de stabilité par produit. En dimension d , on introduit l'entier $s_0 = \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 1$, qui est le plus petit entier s tel que \mathcal{H}^s s'injecte continûment dans L^∞ .

Lemme 2.3 (Moser, [61])

Soient s_1 et s_2 deux entiers vérifiant $s_1 + s_2 \geq s_0$. Si $f \in \mathcal{H}^{s_1}$ et $g \in \mathcal{H}^{s_2}$, alors $fg \in \mathcal{H}^{s_3}$, avec $s_3 = \min(s_1, s_2, s_1 + s_2 - s_0)$ et il existe $C_M(s_1, s_2, d) > 0$ tel que :

$$\|fg\|_{s_3} \leq C_M \|f\|_{s_1} \|g\|_{s_2}.$$

On remarque tout d'abord que le **lemme 2.3** donne l'inégalité pour f et g dans $\mathcal{H}^k \cap \mathcal{H}^{s_0}$:

$$\|fg\|_k \leq C_M(\max\{k, s_0\}, k, d) \|f\|_{\max(k, s_0)} \|g\|_k. \quad (2.1)$$

En particulier, (2.1) assure que \mathcal{H}^k est stable par multiplication dès que $k \geq s_0$. De même, on a le lemme suivant :

Lemme 2.4

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \mathbb{N}$, $\zeta \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\zeta| = k$ et $\gamma \in \mathbb{N}^d$ tel que $\gamma \leq \zeta$, il existe une constante $C_{Mp}(|\zeta|, |\gamma|, d) > 0$ telle que, pour tous $f \in \mathcal{H}^{\max(k, s_0)}$ et $g \in \mathcal{H}^k$:

$$\|D^\gamma f \cdot D^{\zeta-\gamma} g\|_0 \leq C_{Mp}(|\zeta|, |\gamma|, d) \|f\|_{\max(k, s_0)} \|g\|_k.$$

Démonstration : Distinguons les cas $k \geq s_0$ et $k < s_0$. Dans le premier cas, on prend, avec les notations du **lemme 2.3**, $s_1 = k - |\gamma|$ et $s_2 = |\gamma|$. D'où $s_3 = \min(k - |\gamma|, |\gamma|, k - s_0) \geq 0$. On a bien $D^\gamma f \in \mathcal{H}^{s_1}$, $D^{\zeta-\gamma} g \in \mathcal{H}^{s_2}$ et le **lemme 2.3** assure que :

$$\|D^\gamma f \cdot D^{\zeta-\gamma} g\|_0 \leq C_M(|\zeta| - |\gamma|, |\gamma|, d) \|D^\gamma f\|_{s_1} \|D^{\zeta-\gamma} g\|_{s_2} \leq C_{Mp} \|f\|_k \|g\|_k.$$

Dans le cas $k < s_0$, on pose de même $s_1 = s_0 - |\gamma|$ et $s_2 = |\gamma|$, de sorte que $D^\gamma f \in \mathcal{H}^{s_1}$, $D^{\zeta-\gamma} g \in \mathcal{H}^{s_2}$ et $s_3 = 0$. On obtient finalement le résultat, en posant : $C_{Mp}(|\zeta|, |\gamma|, d) = C_M(\max(s_0, |\zeta|) - |\gamma|, |\gamma|, d)$. ■

Ces inégalités fonctionnelles permettent d'obtenir des résultats sur les espaces $\mathcal{X}_{s, \mathcal{T}}(\Omega)$ définis précédemment.

Corollaire 2.2

Les dérivées des fonctions de $\mathcal{X}_{s, \mathcal{T}}(\Omega)$ sont dans $\mathcal{X}_{s-1, \mathcal{T}}(\Omega)$ pour $s \geq 2$.

Démonstration : Soit $f \in \mathcal{X}_{s, \mathcal{T}}(\Omega)$. On vérifie tout d'abord que :

$$\sup_{t \in [0, \mathcal{T}]} \|\nabla f(t, \cdot)\|_{s-1} \leq \sup_{t \in [0, \mathcal{T}]} \|f(t, \cdot)\|_s < \infty,$$

ce qui justifie que $\nabla f \in L^\infty([0, \mathcal{T}], \mathcal{H}^{s-1}(\Omega))$. On prouve de même que $\nabla f \in L^2([0, \mathcal{T}], \mathcal{H}^s(\Omega))$. Pour justifier que ∇f est dans $\mathcal{C}^0([0, \mathcal{T}], L^2(\Omega))$, on utilise le **lemme 2.2** : pour $s' = 1 < s$, $f \in \mathcal{W}_{s, \mathcal{T}}(\Omega) \subset \mathcal{C}^0([0, \mathcal{T}], \mathcal{H}^1(\Omega))$. Or, on a :

$$\|\nabla f(t_1, \cdot) - \nabla f(t_2, \cdot)\|_0 \leq \|f(t_1, \cdot) - f(t_2, \cdot)\|_1.$$

On conclut avec la continuité de $\begin{cases} t \mapsto f(t, \cdot), \\ [0, \mathcal{T}] \rightarrow \mathcal{H}^1(\Omega). \end{cases}$ ■

Corollaire 2.3

Si $f \in \mathcal{X}_{s_1, \mathcal{T}}(\Omega)$ et $g \in \mathcal{X}_{s_2, \mathcal{T}}(\Omega)$ avec $s_1 \geq 1$, $s_2 \geq 1$ et $s_1 + s_2 \geq s_0 + 2$, alors $fg \in \mathcal{X}_{s_3, \mathcal{T}}(\Omega)$, où on a posé $s_3 = \min\{s_1, s_2, s_1 + s_2 - s_0\}$, et il existe $C_X(s_1, s_2, d)$ tel que :

$$\|fg\|_{s_3, \mathcal{T}} \leq C_X \|f\|_{s_1, \mathcal{T}} \|g\|_{s_2, \mathcal{T}}.$$

Démonstration : Par le **lemme 2.3**, $fg \in L^\infty([0, \mathcal{T}], \mathcal{H}^{s_3}(\Omega))$ et $\|fg\|_{s_3} \leq C_M(s_1, s_2, d) \|f\|_{s_1} \|g\|_{s_2}$.

On a ensuite :

$$\begin{aligned} \int_0^{\mathcal{T}} \|\nabla(fg)\|_{s_3}^2(t) dt &\leq 2 \left(\int_0^{\mathcal{T}} \|f \nabla g\|_{s_3}^2(t) dt + \int_0^{\mathcal{T}} \|g \nabla f\|_{s_3}^2(t) dt \right) \\ &\leq 2C_M(s_1, s_2, d)^2 \left(\int_0^{\mathcal{T}} \|f\|_{s_1}^2(t) \|\nabla g\|_{s_2}^2(t) dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\mathcal{T}} \|g\|_{s_2}^2(t) \|\nabla f\|_{s_1}^2(t) dt \right) \\ &\leq 2C_M^2 \left(\sup_{t \in [0, \mathcal{T}]} \|f(t, \cdot)\|_{s_1}^2 \int_0^{\mathcal{T}} \|\nabla g\|_{s_2}^2(t) dt \right. \\ &\quad \left. + \sup_{t \in [0, \mathcal{T}]} \|g(t, \cdot)\|_{s_2}^2 \int_0^{\mathcal{T}} \|\nabla f\|_{s_1}^2(t) dt \right) \\ &\leq 2C_M^2 \|f\|_{s_1, \mathcal{T}}^2 \|g\|_{s_2, \mathcal{T}}^2. \end{aligned}$$

D'où $fg \in L^2([0, \mathcal{T}], \mathcal{H}^{s_3+1}(\Omega))$.

D'autre part, le **lemme 2.2** fournit $f \in \mathcal{C}^0([0, \mathcal{T}], \mathcal{H}^{s_1-1}(\Omega))$ et $g \in \mathcal{C}^0([0, \mathcal{T}], \mathcal{H}^{s_2-1}(\Omega))$.

En posant $s'_3 = \min\{s_1 - 1, s_2 - 1, s_1 + s_2 - s_0 - 2\}$, on a, *via* le **lemme 2.4** : $fg \in \mathcal{C}^0([0, \mathcal{T}], \mathcal{H}^{s'_3}(\Omega)) \subset \mathcal{C}^0([0, \mathcal{T}], L^2(\Omega))$ sous l'hypothèse $s_1 + s_2 \geq s_0 + 2$. Le résultat est établi, avec la notation : $C_X(s_1, s_2, d) = \sqrt{3}C_M(s_1, s_2, d)$. ■

Corollaire 2.4

Soit $s \geq s_0$ en dimension $d \geq 2$. Alors $\mathcal{X}_{s,\mathcal{T}}(\Omega)$ est stable par multiplication et est donc une algèbre de Banach.

Les deux derniers corollaires sont utilisés constamment dans la démonstration de convergence du système itératif, sans qu'il y soit nécessairement fait référence. Leur importance est fondamentale pour tous les calculs d'estimation d'énergie, bien qu'ils n'apparaissent pas dans la littérature consacrée à ces équations.

On rappelle enfin quelques lemmes d'analyse fonctionnelle. Le premier concerne les interpolations entre espaces de Sobolev, et les deux suivants des inégalités de composition.

Lemme 2.5 (Interpolation, [61])

Pour $(s_1, s_2) \in \mathbb{N}^2$ et $\vartheta \in [0, 1]$, on pose $r = \vartheta s_1 + (1 - \vartheta)s_2$. Alors, pour toute fonction $f \in \mathcal{H}^{\max(s_1, s_2)}$:

$$\|f\|_r \leq \|f\|_{s_1}^{\vartheta} \|f\|_{s_2}^{1-\vartheta}.$$

Lemme 2.6 ([55])

Soient G un ouvert de \mathbb{R}^d , g une application sur G de régularité $\mathcal{C}^s(G, \mathbb{R}^p)$ et v une application de Ω dans G_0 ouvert borné tel que $\overline{G_0} \subset G$. On suppose $v \in \mathcal{H}^s(\Omega, \mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$. Alors il existe une constante $C_{comp}(k, d)$ tel que, pour tout $\zeta \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\zeta| = k \leq s$:

$$\left\| D^\zeta g(v) \right\|_0 \leq C_{comp} (1 + |v|_\infty)^{k-1} \cdot \|\nabla v\|_{k-1} \cdot \max_{0 < |\gamma| \leq k} \left\{ \left| \frac{\partial^\gamma g}{\partial v^\gamma}(v) \right| : v \in \overline{G_0} \right\}.$$

On introduit alors les notations :

$$\|g\|_{\infty, \overline{G_0}} = \max_{\overline{G_0}} |g| \quad \text{et} \quad \|g\|_{\infty, \overline{G_0}, s} = \max_{0 < |\gamma| \leq s} \|\partial_v^\gamma g\|_{\infty, \overline{G_0}}.$$

Pour les détails de notations sur les multi-indices et les dérivées par rapport à x ou à v , se reporter à la **Liste des symboles**, p. **xiii**.

Lemme 2.7 ([36])

Soient G un ouvert de \mathbb{R}^d , g une application sur G de régularité $\mathcal{C}^{s+2}(G, \mathbb{R}^p)$ et $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ deux applications de Ω dans G_1 ouvert convexe borné tel que $\bar{G}_1 \subset G$. On suppose $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathcal{H}^{s+1}(\Omega, \mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$. On note $\bar{g}_{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2}$ l'application de Ω dans $\mathcal{M}_{p,d}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\bar{g}_{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2}(\mathbf{x}) = \int_0^1 \partial_v g(\zeta \mathbf{v}_1(\mathbf{x}) + (1 - \zeta) \mathbf{v}_2(\mathbf{x})) d\zeta,$$

de sorte que $g(\mathbf{v}_1) - g(\mathbf{v}_2) = \bar{g}_{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2} \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$. Alors pour tout $\zeta \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\zeta| = s$:

$$\left\| \bar{g}_{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2} \right\|_0 \leq |\Omega|^{1/2} \|\partial_v g\|_{\infty, \bar{G}_0},$$

$$\left\| D^\zeta \bar{g}_{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2} \right\|_0 \leq C_{comp}(s, d) \|\partial_v g\|_{\infty, \bar{G}_0, s} (1 + |\mathbf{v}_1|_\infty + |\mathbf{v}_2|_\infty)^{s-1} (\|\nabla \mathbf{v}_1\|_{s-1} + \|\nabla \mathbf{v}_2\|_{s-1}).$$

Si, de plus, \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 sont des fonctions régulières du temps, avec $D_t = \partial_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)$ et \mathbf{u} suffisamment régulier, on a :

$$\left\| D_t \bar{g}_{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2} \right\|_0 \leq \left\| \partial_v^2 g \right\|_{\infty, \bar{G}_0} (\|D_t \mathbf{v}_1\|_0 + \|D_t \mathbf{v}_2\|_0),$$

$$\begin{aligned} \left\| D^\zeta D_t \bar{g}_{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2} \right\|_0 &\leq \left\| \partial_v^2 g \right\|_{\infty, \bar{G}_0} \left(\|D^\zeta D_t \mathbf{v}_1\|_0 + \|D^\zeta D_t \mathbf{v}_2\|_0 \right) \\ &\quad + C_{dev}(\zeta, d) \left\| \partial_v^2 g \right\|_{\infty, \bar{G}_0, s} \left(\|D_t \mathbf{v}_1\|_{\max(s_0, s)} + \|D_t \mathbf{v}_2\|_{\max(s_0, s)} \right) \\ &\quad \times (1 + |\mathbf{v}_1|_\infty + |\mathbf{v}_2|_\infty)^{s-1} (\|\nabla \mathbf{v}_1\|_{s-1} + \|\nabla \mathbf{v}_2\|_{s-1}). \end{aligned}$$

On a noté ici : $C_{dev}(\zeta, d) = C_{comp}(k, d) \sum_{\substack{\gamma \leq \zeta \\ \gamma \neq 0}} \binom{\zeta}{\gamma} C_{Mp}(k, |\gamma|, d) > 0$.

On termine ce paragraphe sur les lemmes de base pour les chapitres à venir par celui qui sera utilisé constamment, à savoir le(s) lemme(s) de *Grönwall*. Sous ce terme général se cachent plusieurs résultats, impliquant des inégalités différentielles ou intégrales. On en donne ici trois versions, parmi tant d'autres.

Lemme 2.8 (Grönwall)

1. Soient f , g et H trois fonctions continues avec g positive, telles que :

$$f(t) \leq \int_0^t g(\tau)f(\tau) \, d\tau + H(t).$$

Alors ces trois fonctions vérifient l'inégalité :

$$f(t) \leq e^{G(t)} \int_0^t e^{-G(\tau)}g(\tau)H(\tau) \, d\tau + H(t),$$

G étant une primitive de g .

2. Soient f , g et h trois fonctions continues, avec f dérivable, telles que :

$$f'(t) \leq f(t)g(t) + h(t).$$

Alors ces trois fonctions vérifient l'inégalité :

$$f(t) \leq e^{G(t)} \left(f(0) + \int_0^t e^{-G(\tau)}h(\tau) \, d\tau \right),$$

G étant la primitive de g qui s'annule en 0.

Ces deux estimations sont équivalentes, car lorsque f est dérivable, la première inégalité redonne la seconde. On donne une dernière version, avec un second membre intégral :

Lemme 2.9

Soient f , g et h trois fonctions continues avec g positive, telles que :

$$f(t) \leq \int_0^t g(\tau)f(\tau) \, d\tau + \int_0^t h(\tau) \, d\tau.$$

Alors ces trois fonctions vérifient l'inégalité :

$$f(t) \leq e^{G(t)} \int_0^t e^{-G(\tau)}h(\tau) \, d\tau,$$

G étant une primitive de g .

2.4 MÉTHODE DES CARACTÉRISTIQUES

On s'intéresse dans ce paragraphe à la méthode des caractéristiques, qui permet de construire des solutions pour des équations comportant un opérateur de convection (advection, advection-diffusion, ...).

Définition 2.5

On appelle **flot caractéristique** associé au champ de vitesse \mathbf{u} la famille de solutions $\mathcal{X} = \mathcal{X}(t; s, \mathbf{x}_0)$ aux EDOs paramétrées par le temps d'origine $s \in \mathbb{R}$ et par la position initiale $\mathbf{x}_0 \in \Omega$:

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{X}}{dt} = \mathbf{u}(t, \mathcal{X}(t)), \\ \mathcal{X}(s) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad \begin{array}{l} (2.2a) \\ (2.2b) \end{array}$$

La forme intégrale associée à ce problème s'écrit :

$$\mathcal{X}(t; s, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0 + \int_s^t \mathbf{u}(\tau, \mathcal{X}(\tau; s, \mathbf{x}_0)) d\tau.$$

Cette formulation est la base de la preuve du théorème de *Cauchy-Lipschitz* où la solution est construite comme limite d'un processus itératif.¹

Le flot caractéristique lié à un écoulement permet de reformuler les équations en coordonnées lagrangiennes. \mathcal{X} décrit en effet la position au temps t d'une particule située en \mathbf{x}_0 au temps s , dans un fluide évoluant à la vitesse \mathbf{u} . Il convient toutefois de s'assurer que ce champ \mathcal{X} est bien défini mathématiquement, selon la régularité du champ de vitesse \mathbf{u} et les propriétés du domaine dans lequel on étudie l'EDO (2.2a).

Usuellement, on suppose $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^0([0, \mathcal{T}] \times \overline{\Omega})$ et **lipschitzien par rapport à la variable d'espace**, avec $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$. Cela permet d'appliquer le théorème de *Cauchy-Lipschitz* au système (2.2), ce qui assure l'existence et l'unicité de la solution \mathcal{X} . On définit ainsi, pour chaque couple (s, \mathbf{x}_0) , une trajectoire dans \mathbb{R}^d et sur un intervalle de temps $\mathcal{I}(s, \mathbf{x}_0) = [s - \mathcal{T}_{s, \mathbf{x}_0}^-, s + \mathcal{T}_{s, \mathbf{x}_0}^+]$. Dans le cas d'un domaine Ω borné lipschitzien, on ajoute l'hypothèse que le champ de vitesse est tangent au bord du domaine ($\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}|_{\partial\Omega} = 0$). Cela permet de justifier que **les trajectoires ne sortent pas du domaine** quels que soient $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ et $s \in [0, \mathcal{T}]$, ce qui assure que la solution est définie sur $[0, \mathcal{T}]$.

On a de plus l'estimation de continuité :

$$\|\mathcal{X}(t; s, \mathbf{x}_1) - \mathcal{X}(t; s, \mathbf{x}_2)\| \leq e^{C_L|t-s|} \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|,$$

où C_L est la constante de Lipschitz de \mathbf{u} . Cette inégalité résulte de la version intégrale de (2.2) et du lemme de *Grönwall*.

L'utilité de définir ces caractéristiques est de pouvoir récrire l'opérateur de convection associé au champ de vitesse \mathbf{u} . En effet, on vérifie que :

$$(\partial_t Y + \mathbf{u} \cdot \nabla Y)(t, \mathcal{X}(t)) = \frac{d}{dt} [Y(t, \mathcal{X}(t))].$$

En particulier, dans le cas de l'advection pure, toute solution régulière de

$$\begin{cases} \partial_t Y + \mathbf{u} \cdot \nabla Y = f, \\ Y(0, \cdot) = Y^0, \end{cases} \quad (2.3)$$

¹ La plupart des résultats sont établis sur la forme autonome de (2.2) : en posant $\tilde{\mathcal{X}} = (t, \mathcal{X})$ et $\tilde{\mathbf{u}} = (1, \mathbf{u})$, l'EDO se réécrit $\tilde{\mathcal{X}}'(t) = \tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\mathcal{X}}(t))$, mais la régularité est alors supposée identique par rapport à t et \mathbf{x} .

est connue le long des courbes caractéristiques (et même constante lorsque $f = 0$) :

$$Y(t, \mathcal{X}(t; s, \mathbf{x}_0)) = Y(s, \mathbf{x}_0) + \int_s^t f(\tau, \mathcal{X}(\tau; s, \mathbf{x}_0)) d\tau.$$

Pour exprimer explicitement la solution, il faut alors inverser le flot. La question se pose donc de savoir si la fonction $\mathbf{x}_0 \mapsto \mathcal{X}(t; s, \mathbf{x}_0)$ est bijective pour tous t et s fixés dans $[0, \mathcal{T}]$. La réponse est apportée par la propriété suivante de semi-groupe, qui découle de l'application du théorème de *Cauchy-Lipschitz* (unicité des trajectoires passant par un point donné) :

$$\mathcal{X}(t_1; t_2, \mathcal{X}(t_2; t_3, \mathbf{x}_0)) = \mathcal{X}(t_1; t_3, \mathbf{x}_0). \quad (2.4)$$

On vérifie en effet que les deux membres de l'égalité, considérés comme des fonctions de t_1 , sont solutions de la même équation caractéristique, avec la même donnée initiale $\mathcal{X}(t_2; t_3, \mathbf{x}_0)$. On a ainsi :

$$\forall \mathbf{x}_0 \in \Omega, \mathcal{X}(t; s, \mathcal{X}(s; t, \mathbf{x}_0)) = \mathbf{x}_0 \text{ et } \mathcal{X}(s; t, \mathcal{X}(t; s, \mathbf{x}_0)) = \mathbf{x}_0, \quad (2.5)$$

ce qui assure que $\mathbf{x}_0 \mapsto \mathcal{X}(t; s, \mathbf{x}_0)$ est un homéomorphisme de Ω dans lui-même pour tous t et s fixés dans $[0, \mathcal{T}]$. Son inverse est l'application $\mathbf{x} \mapsto \mathcal{X}(s; t, \mathbf{x})$. La solution vérifie donc, en utilisant la propriété de semi-groupe pour $s = 0$:

$$Y(t, \mathbf{x}) = Y^0(\mathcal{X}(0; t, \mathbf{x})) + \int_0^t f(\tau, \mathcal{X}(\tau; t, \mathbf{x})) d\tau.$$

Pour aller plus loin dans la caractérisation de \mathcal{X} , on est amené à supposer plus de régularité sur le champ de vitesse. Pour $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^0([0, \mathcal{T}] \times \bar{\Omega}) \cap L^\infty([0, \mathcal{T}], \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}))$ (on conserve le caractère uniformément lipschitzien), alors le jacobien du flot vérifie l'équation différentielle [15, 42] :

$$\frac{d}{dt} [\det \nabla_{\mathbf{x}_0} \mathcal{X}](t; s, \mathbf{x}_0) = \nabla \cdot \mathbf{u}(t, \mathcal{X}(t; s, \mathbf{x}_0)) \times \det \nabla_{\mathbf{x}_0} \mathcal{X}(t; s, \mathbf{x}_0). \quad (2.6)$$

Avec $\nabla_{\mathbf{x}_0} \mathcal{X}(s; s, \mathbf{x}_0) = \mathcal{I}d$ et donc $\det \nabla_{\mathbf{x}_0} \mathcal{X}(s; s, \mathbf{x}_0) = 1$, il vient :

$$\det \nabla_{\mathbf{x}_0} \mathcal{X}(t; s, \mathbf{x}_0) = \exp \left[\int_s^t \nabla \cdot \mathbf{u}(\tau, \mathcal{X}(\tau; s, \mathbf{x}_0)) d\tau \right]. \quad (2.7)$$

Le terme de droite étant strictement positif sous les hypothèses précédentes, on en déduit par application du théorème d'inversion locale que $\mathcal{X}(t; s, \cdot)$ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme. En particulier, pour les écoulements incompressibles, on a $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. D'où, le jacobien du flot est identiquement égal à 1, ce qui se traduit par la propriété de conservation des volumes.

On s'intéresse ensuite à la régularité du flot, imposée par celle de \mathbf{u} (cf. Th. 7.1 et 7.2 dans Coddington et Levinson [17]). Si \mathbf{u} est de classe \mathcal{C}^k par rapport à t , alors \mathcal{X} est de classe \mathcal{C}^{k+1} par rapport à t . Pour ce qui est de la régularité par rapport aux données initiales (s, \mathbf{x}_0) , la régularité est celle de \mathbf{u} par rapport à \mathbf{x} . En particulier, si $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^0([0, \mathcal{T}] \times \bar{\Omega}) \cap L^\infty([0, \mathcal{T}], \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}))$, le flot est de classe \mathcal{C}^1 par rapport à (t, s, \mathbf{x}_0) .

La régularité du flot étant établie, on peut en déduire la régularité de la solution Y du problème d'advection (2.3). Tout dépend alors de la régularité de la donnée initiale Y^0 et du second membre f (la régularité de la solution étant égale à la régularité minimale entre celle du flot et celle des données). Par exemple, si Y^0 et f sont dans $L^\infty(\Omega)$, alors $Y \in L^\infty(\Omega)$.² Dans des cadres plus réguliers avec $Y^0 \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ et $f \in \mathcal{C}^0([0, \mathcal{T}], \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}))$, la solution est dans $\mathcal{C}^1([0, \mathcal{T}] \times \overline{\Omega})$.

Pour $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^0([0, \mathcal{T}] \times \overline{\Omega}) \cap L^\infty([0, \mathcal{T}], \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}))$, comme \mathcal{X} définit un changement de variable, on a le résultat suivant :

$$\forall \omega \subseteq \Omega, \int_{\mathcal{X}(t;s,\omega)} f(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\omega} f(t, \mathcal{X}(t;s, \mathbf{x}_0)) |\det \nabla_{\mathbf{x}_0} \mathcal{X}(t;s, \mathbf{x}_0)| \, d\mathbf{x}_0.$$

Rappelons le théorème de transport qui en découle, pour un domaine $\omega(t)$ dont l'évolution est régie par le champ de vitesse \mathbf{u} :

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\omega(t)} f(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right) = \int_{\omega(t)} (\partial_t f + \nabla \cdot (f\mathbf{u}))(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

En particulier, pour $f \equiv 1$, on a :

$$\begin{aligned} \forall \omega \subseteq \Omega, |\mathcal{X}(t;s,\omega)| &= \int_{\omega} \exp \left[\int_s^t \nabla \cdot \mathbf{u}(\tau, \mathcal{X}(\tau;s, \mathbf{x}_0)) \, d\tau \right] \, d\mathbf{x}_0, \\ \frac{d}{dt} |\mathcal{X}(t;s,\omega)| &= \int_{\mathcal{X}(t;s,\omega)} \nabla \cdot \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, sous ces conditions de régularité sur le champ de vitesse (en rouge ci-dessus), on a la relation suivante :

$$\partial_s \mathcal{X}(t;s, \mathbf{x}_0) + \nabla_{\mathbf{x}_0} \mathcal{X}(t;s, \mathbf{x}_0) \mathbf{u}(s, \mathbf{x}_0) = 0,$$

qui peut être établie soit en dérivant la relation (2.5) par rapport à s en utilisant la bijectivité de $\mathcal{X}(t;s, \cdot)$, soit en prouvant que le membre de gauche est solution d'une équation différentielle ordinaire linéaire (en t) avec une condition initiale nulle [11].

À noter par ailleurs que lorsque \mathbf{u} est de classe \mathcal{C}^1 , on a l'égalité :

$$\frac{d^2 \mathcal{X}}{dt^2} = (\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})(t, \mathcal{X}(t)).$$

Ce résultat trouve son intérêt en particulier pour l'équation de Burgers [12], où, bien que l'équation soit non-linéaire, la solution reste constante le long des courbes caractéristiques, qui s'avèrent être des droites, comme dans le cas à vitesse constante. L'analyse est cependant moins directe, du fait que l'inconnue du problème de Burgers est le champ

² $L^\infty(\Omega)$ est le cadre naturel pour la modélisation des bulles.

de vitesse lui-même. Comme les caractéristiques sont construites à partir de ce champ de vitesse, elles deviennent des inconnues du problème. On est alors amené à résoudre un problème de point fixe non-linéaire, lequel peut entraîner l'apparition de chocs (conséquence de la non-linéarité globale du problème de Burgers). On revient sur ce point dans le paragraphe 4.3.5.

Les hypothèses portant ici sur le champ de vitesse sont cependant restrictives (compte-tenu de la régularité espérée du champ de vitesse en mécanique des fluides). Une perte de régularité peut entraîner une perte d'unicité des trajectoires, et donc de la bijectivité du flot. Parmi les extensions qui ont été introduites dans la littérature, on peut citer par exemple le cas $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^0([0, \mathcal{T}], W^{s,p}(\Omega))$ avec $s > 1 + d/p$ [10, Lemma A.6] ou encore $\mathbf{u} \in L^1_{loc}([0, \mathcal{T}], \mathcal{C}_\omega(\Omega))$ avec $\mathcal{C}_\omega(\Omega)$ un espace de Lipschitz à poids [14].

Pour aller plus loin, la notion de **flot régulier lagrangien** a été développée pour des champs de vitesse bornés. Un flot régulier lagrangien est une application \mathcal{X} définie sur $[0, \mathcal{T}] \times \Omega$ telle que :

- Pour presque tout t et tout borélien A de mesure de Lebesgue nulle, alors la mesure de l'ensemble $\{x \in \Omega : \mathcal{X}(t, x) \in A\}$ est nulle.
- \mathcal{X} vérifie l'équation caractéristique au sens des distributions, *i.e.*, pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty([0, \mathcal{T}] \times \overline{\Omega})$:

$$\int_0^{\mathcal{T}} \int_{\Omega} [\mathcal{X}(t, x) \partial_t \phi(t, x) + \phi(t, x) \mathbf{u}(t, \mathcal{X}(t, x))] dt dx + \int_{\Omega} x \phi(0, x) dx = 0.$$

On a alors des résultats d'existence d'un tel flot pour des champs de vitesse appartenant à l'espace $L^1([0, \mathcal{T}], W^{1,1}(\Omega)) \cap L^\infty([0, \mathcal{T}] \times \Omega)$ (avec quelques hypothèses en plus sur la divergence du champ) ou à l'espace $L^1(\mathbb{R}_+, BV(\mathbb{R}^d)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ à divergence bornée (*cf.* De Lellis [23] pour plus de détails).

2.5 ESTIMATIONS D'ÉNERGIE ET RÉSULTATS D'EXISTENCE

On rappelle dans cette partie certains résultats sur les équations de type advection pure et advection-diffusion, que l'on adapte aux espaces fonctionnels définis précédemment. L'indice s désigne, sous mention contraire, un entier. En particulier, tous les résultats d'existence et d'unicité de solutions pour les équations classiques citées en préambule sont donnés **pour des espaces de Sobolev à indices entiers**.

On se place dans un domaine borné régulier Ω pour les équations d'advection. En revanche, pour les équations d'advection-diffusion, les résultats sont donnés et démontrés pour des conditions aux limites périodiques (ce qui revient à se placer sur \mathbb{T}^d). La difficulté liée aux domaines bornés quelconques provient des termes de bord issus des intégrations par parties sur les termes différentiels d'ordre 2. En cas d'absence de viscosité, ces dérivées disparaissent et on peut prouver des résultats analogues pour le cas d'un domaine Ω borné et régulier.

2.5.1 Equations de transport

On s'intéresse dans toute cette partie à l'équation :

$$\begin{cases} \partial_t Y + \mathbf{u} \cdot \nabla Y \stackrel{\Omega}{=} f, & (2.8a) \\ Y(0, \mathbf{x}) \stackrel{\Omega}{=} Y_0(\mathbf{x}). & (2.8b) \end{cases}$$

\mathbf{u} , f et Y_0 sont ici des données. Le domaine Ω est supposé régulier et borné dans \mathbb{R}^d .

Remarque 1 – Dans ce qui suit, on s'intéresse à des données régulières (de type Sobolev), ce qui permet de parler de solutions fortes et d'utiliser des estimations d'énergie. On démontre deux lemmes associés à cette équation. le premier sera utilisé dans le cadre du modèle ABV, le second dans le cadre du système DLMN.

Ces résultats sont utiles dans une première étape de la modélisation, afin d'étudier le comportement des solutions des problèmes considérés. Toutefois, à terme, il faudra se placer dans un cadre moins régulier (solutions faibles) pour lequel les techniques sont fondamentalement différentes. \diamond

Le résultat est ici donné en deux parties. La première partie est placée dans le cadre des espaces $\mathcal{W}_{s, \mathcal{T}}(\Omega)$, qui s'inspirent de [27, 35]. La seconde partie est consacrée à l'extension à l'espace $\mathcal{X}_{s, \mathcal{T}}(\Omega)$.

Lemme 2.10

Soient \mathbf{u} et f dans $\mathcal{W}_{s, \mathcal{T}}(\Omega)$ pour $\mathcal{T} > 0$ et $s \geq s_0 + 1$ avec $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0$. Alors, pour $Y_0 \in \mathcal{H}^s$, l'équation hyperbolique linéaire (2.8) admet une unique solution classique $Y \in \mathcal{W}_{s, \mathcal{T}}(\Omega)$, qui vérifie pour tout $r \in \{0, \dots, s\}$ l'inégalité d'énergie :

$$\|Y\|_{r, \mathcal{T}} \leq e^{\underline{\chi}_r(\mathcal{T})} \left(\|Y_0\|_r + \int_0^{\mathcal{T}} e^{-\underline{\chi}_r(t)} \|f(t, \cdot)\|_r dt \right),$$

pour toute fonction $\underline{\chi}_r$ vérifiant :

$$\underline{\chi}'_r(t) \geq \begin{cases} \frac{1}{2} \|\nabla \cdot \mathbf{u}(t, \cdot)\|_{\infty}, & \text{pour } r = 0, \\ C_{adv,0}(r, d, \Omega) \|\nabla \mathbf{u}(t, \cdot)\|_{\max(r-1, s_0)}, & \text{pour } r \in \{1, \dots, s\}. \end{cases}$$

Différentes constantes interviennent dans l'énoncé du lemme et au cours de la démonstration. Leurs expressions sont données soit directement dans la démonstration, soit dans la remarque 3, page 45.

Lemme 2.11

Soient \mathbf{u} et f dans $\mathcal{X}_{s,\mathcal{T}}(\Omega)$ pour $\mathcal{T} > 0$ et $s \geq s_0 + 1$ avec $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0$. Alors, pour $Y_0 \in \mathcal{H}^{s+1}$, l'équation hyperbolique linéaire (2.8) admet une unique solution classique $Y \in \mathcal{X}_{s,\mathcal{T}}(\Omega)$, qui vérifie pour tout $r \in \{0, \dots, s\}$ l'inégalité d'énergie :

$$\begin{aligned} \|Y\|_{r,\mathcal{T}}^2 + e^{\bar{\chi}_r(\mathcal{T})} \int_0^{\mathcal{T}} e^{-\bar{\chi}_r(t)} \|\nabla Y(t, \cdot)\|_r^2 dt \\ \leq e^{\bar{\chi}_r(\mathcal{T})} \left((1 + \mathcal{T}) \|Y_0\|_{r+1}^2 + \int_0^{\mathcal{T}} e^{-\bar{\chi}_r(t)} \|f\|_{r,t}^2 dt \right), \end{aligned}$$

pour toute fonction $\bar{\chi}_r$ vérifiant :

$$\bar{\chi}'_r(t) \geq \begin{cases} C_{adv,1}(r, d, \Omega) \|\nabla \mathbf{u}(t, \cdot)\|_{\max(r, s_0)}, & \text{si } f = 0, \\ 1 + C_{adv,1}(r, d, \Omega) \|\nabla \mathbf{u}(t, \cdot)\|_{\max(r, s_0)}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On donne une démonstration commune pour ces deux lemmes.

Démonstration : L'existence d'une solution s'obtient par exemple par la méthode des caractéristiques (cf. § 2.4 et [27]). On construit en effet une solution en résolvant les EDOs :

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{X}}{dt} = \mathbf{u}(t, \mathcal{X}(t)), \\ \mathcal{X}(t_0) = \mathbf{x}_0, \end{cases} \quad (\text{Lem.2.11.i})$$

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{Y}}{dt} = f(t, \mathcal{X}(t)), \\ \mathcal{Y}(t_0) = Y_0(\mathbf{x}_0). \end{cases} \quad (\text{Lem.2.11.ii})$$

Les inclusions $\mathcal{W}_{s,\mathcal{T}}(\Omega) \subset \mathcal{C}^0([0, \mathcal{T}] \times \bar{\Omega})$ (corollaire 2.1) et $\mathcal{W}_{s,\mathcal{T}}(\Omega) \subset L^\infty([0, \mathcal{T}], \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}))$ pour $s \geq s_0 + 1$ (théorème 2.1), prouvent que la solution $\mathcal{X} = \mathcal{X}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ de (Lem.2.11.i) existe et est unique, continûment différentiable par rapport à (t, t_0, \mathbf{x}_0) , définissant ainsi un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme à (t, t_0) fixés d'inverse $\mathcal{X}(t_0, t, \mathbf{x}_0)$. Or, la solution de (Lem.2.11.ii) est donnée par :

$$\mathcal{Y}(t, t_0, \mathbf{x}_0) = Y_0(\mathbf{x}_0) + \int_{t_0}^t f(\tau, \mathcal{X}(\tau, t_0, \mathbf{x}_0)) d\tau.$$

On remonte alors les caractéristiques pour obtenir la solution :

$$Y(t, \mathbf{x}) = Y_0(\mathcal{X}(0, t, \mathbf{x})) + \int_0^t f(\tau, \mathcal{X}(\tau, t, \mathbf{x})) d\tau. \quad (\text{Lem.2.11.iii})$$

Cette solution est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \mathcal{T}] \times \bar{\Omega}$ en vertu des résultats énoncés dans la partie 2.4.

On s'intéresse ensuite plus particulièrement aux estimations d'énergie qui fournissent la régularité de cette solution (on en déduit également l'unicité). On va dériver dans la suite des estimations \mathcal{H}^s . Pour prouver que $Y \in \mathcal{W}_{s,\mathcal{T}}(\Omega)$ ou $Y \in \mathcal{X}_{s,\mathcal{T}}(\Omega)$ (à ce stade, Y est de classe \mathcal{C}^1), on peut soit utiliser la régularité exacte de \mathbf{u} et de f pour améliorer celle du flot \mathcal{X} , soit construire une solution par un processus itératif (cf. annexe de [35]).

Commençons par une estimation dans L^2 , en multipliant l'équation (2.8a) par Y et en intégrant sur tout le domaine. Après intégration par parties et compte-tenu de la condition de glissement, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|Y\|_0^2 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) Y^2 \, dx + \int_{\Omega} f Y \, dx, \\ &\leq \frac{\|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_{\infty}}{2} \|Y\|_0^2 + |\langle f, Y \rangle_0|, & (\text{Lem.2.11.iv}) \\ &\leq \frac{\|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_{\infty}}{2} \|Y\|_0^2 + \|Y\|_0 \|f\|_0. & (\text{Lem.2.11.v}) \end{aligned}$$

Selon que l'on souhaite une estimation de $\|Y\|_0$ ou de $\|Y\|_0^2$, le traitement est différent. Dans tous les cas, on remarque que **l'on peut majorer le premier terme du membre de droite par $\chi_0'(t) \|Y\|_0^2$** pour toute fonction χ_0 vérifiant :

$$\chi_0'(t) \geq \frac{\|\nabla \cdot \mathbf{u}(t, \cdot)\|_{\infty}}{2}.$$

Cette remarque est à l'origine des majorations des exposants dans l'énoncé des deux lemmes.

Dans le premier cas (estimation de $\|Y\|_0$), on divise (Lem.2.11.v) par $\|Y\|_0$, puis on applique l'inégalité de *Grönwall* (cf. **lemme 2.8**) pour obtenir :

$$\|Y(t, \cdot)\|_0 \leq e^{\chi_0(t)} \left[\|Y_0\|_0 + \int_0^t e^{-\chi_0(\tau)} \|f(\tau, \cdot)\|_0 \, d\tau \right].$$

Dans le second cas (estimation de $\|Y\|_0^2$), on utilise dans (Lem.2.11.v) l'inégalité de *Young* (sur le dernier terme) puis de *Grönwall*, ce qui donne :

$$\|Y(t, \cdot)\|_0^2 \leq e^{\bar{\chi}_0(t)} \left[\|Y_0\|_0^2 + \int_0^t e^{-\bar{\chi}_0(\tau)} \|f\|_0^2 \, d\tau \right],$$

avec $\bar{\chi}_0'(t) \geq 1 + \|\nabla \cdot \mathbf{u}(t, \cdot)\|_{\infty}$.

Pour les ordres de dérivation supérieurs, on se donne $k \in \{1, \dots, r\}$ et $\zeta \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\zeta| = k$. On applique alors l'opérateur différentiel D^{ζ} à l'équation (2.8a). On obtient une nouvelle équation d'advection :

$$\partial_t D^{\zeta} Y + \mathbf{u} \cdot \nabla D^{\zeta} Y = D^{\zeta} f + [\mathbf{u} \cdot \nabla, D^{\zeta}] Y.$$

On applique l'estimation (Lem.2.11.iv) à cette équation, ce qui donne :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|D^{\zeta} Y\|_0^2 \leq \frac{\|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_{\infty}}{2} \|D^{\zeta} Y\|_0^2 + |\langle D^{\zeta} f, D^{\zeta} Y \rangle_0| + \left| \langle [\mathbf{u} \cdot \nabla, D^{\zeta}] Y, D^{\zeta} Y \rangle_0 \right|. \quad (\text{Lem.2.11.vi})$$

Traitons le crochet de Poisson :

$$\begin{aligned} \langle [\mathbf{u} \cdot \nabla, D^{\zeta}] Y, D^{\zeta} Y \rangle_0 &= - \sum_{\substack{\gamma \leq \zeta \\ |\gamma| > 0}} \binom{\zeta}{\gamma} \int_{\Omega} D^{\zeta} Y \left(D^{\gamma} \mathbf{u} \cdot D^{\zeta-\gamma} \nabla Y \right) \, dx \\ &= - \sum_{j=1}^d \sum_{\gamma \leq \zeta - e_j} \binom{\zeta}{\gamma + e_j} \int_{\Omega} D^{\zeta} Y \left(D^{\gamma} \mathbf{u} \cdot D^{\zeta-\gamma-e_j} \nabla Y \right) \, dx \\ &\leq \sum_{j=1}^d \sum_{\gamma \leq \zeta - e_j} \binom{\zeta}{\gamma + e_j} \|D^{\zeta} Y\|_0 \|D^{\gamma}(\partial_j \mathbf{u}) \cdot D^{(\zeta-e_j)-\gamma}(\nabla Y)\|_0 \\ &\leq C_{adv,2}(\zeta, d) \|D^{\zeta} Y\|_0 \|\nabla \mathbf{u}\|_{\max(k-1, s_0)} \|\nabla Y\|_{k-1}. & (\text{Lem.2.11.vii}) \end{aligned}$$

On somme d'une part les inégalités (Lem.2.11.vi) en tenant compte de (Lem.2.11.vii) pour tous les multi-indices ζ de longueur k , puis pour k de 1 à r , que l'on additionne à (Lem.2.11.iv) :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|Y\|_r^2 \leq \frac{|\nabla \cdot \mathbf{u}|_\infty}{2} \|Y\|_r^2 + C_{adv,3}(r,d) \|\nabla \mathbf{u}\|_{\max(r-1,s_0)} \|Y\|_r^2 + \|f\|_r \|Y\|_r, \quad (\text{Lem.2.11.viii})$$

ou encore, par *Young* et en multipliant par 2 :

$$\frac{d}{dt} \|Y\|_r^2 \leq |\nabla \cdot \mathbf{u}|_\infty \|Y\|_r^2 + 2C_{adv,3}(r,d) \|\nabla \mathbf{u}\|_{\max(r-1,s_0)} \|Y\|_r^2 + \|f\|_r^2 + \|Y\|_r^2, \quad (\text{Lem.2.11.ix})$$

Le terme $|\nabla \cdot \mathbf{u}|_\infty$ peut être majoré à l'aide des résultats d'injections de Sobolev :

$$|\nabla \cdot \mathbf{u}|_\infty \leq C_{sob}(\max\{r-1, s_0\}, d) \|\nabla \mathbf{u}\|_{\max(r-1,s_0)}.$$

Comme précédemment, on peut en déduire deux estimations. La première est obtenue en divisant (Lem.2.11.viii) par $\|Y\|_r$:

$$\frac{d}{dt} \|Y\|_r \leq \frac{1}{2} \underbrace{[C_{sob} + 2C_{adv,3}(r,d)]}_{C_{adv,0}(r,d)} \|\nabla \mathbf{u}\|_{\max(r-1,s_0)} \|Y\|_r + \|f\|_r \leq \underline{\chi}'_r(t) \|Y\|_r + \|f\|_r,$$

expression à laquelle on applique l'inégalité de *Grönwall* :

$$\|Y(t, \cdot)\|_r \leq e^{\underline{\chi}_r(t)} \left[\|Y_0\|_r + \int_0^t e^{-\underline{\chi}_r(\tau)} \|f(\tau, \cdot)\|_r d\tau \right], \quad (\text{Lem.2.11.x})$$

où on a introduit $\underline{\chi}_r$ telle que $\underline{\chi}'_r(t) \geq C_{adv,0}(r,d) \|\nabla \mathbf{u}(t, \cdot)\|_{\max(r-1,s_0)}$. La seconde possibilité consiste à appliquer directement l'inégalité de *Grönwall* à (Lem.2.11.ix) :

$$\|Y(t, \cdot)\|_r^2 \leq e^{\hat{\chi}_r(t)} \left[\|Y_0\|_r^2 + \int_0^t e^{-\hat{\chi}_r(\tau)} \|f(\tau, \cdot)\|_r^2 d\tau \right], \quad (\text{Lem.2.11.xi})$$

avec $\hat{\chi}'_r(t) \geq 1 + 2C_{adv,0}(r,d) \|\nabla \mathbf{u}(t, \cdot)\|_{\max(r-1,s_0)}$. Si $f \equiv 0$, le facteur $\frac{1}{2}$ devant $\|Y\|_r^2$ (provenant de l'inégalité de *Young*) est absent, et l'exposant prend la forme : $\hat{\chi}'_r(t) \geq 2C_{adv,0}(r,d) \|\nabla \mathbf{u}(t, \cdot)\|_{\max(r-1,s_0)}$. On aurait pu élever l'expression (Lem.2.11.x) au carré, ce qui donnerait pour exposant $2C_{adv,0}(r,d) \|\nabla \mathbf{u}(t, \cdot)\|_{\max(r-1,s_0)}$ dans tous les cas (en appliquant *Cauchy-Schwarz* discret et *Jensen*), mais avec un coefficient 2 devant le membre de droite, ce qui n'est pas optimal.

D'autre part, pour obtenir l'estimation en norme $\mathcal{X}_{r,\mathcal{J}}(\Omega)$, on somme pour k de 1 à $r+1$ les inégalités (Lem.2.11.vi-Lem.2.11.vii), ce qui donne :

$$\frac{d}{dt} \|\nabla Y\|_r^2 \leq \left[\underbrace{(C_{sob}(\max\{r, s_0\}, d) + 2C_{adv,3}(r+1, d))}_{C_{adv,1}(r,d)=2C_{adv,0}(r+1,d)} \|\nabla \mathbf{u}\|_{\max(r,s_0)} + 1 \right] \|\nabla Y\|_r^2 + \|\nabla f\|_r^2.$$

On en déduit comme précédemment :

$$\|\nabla Y(t, \cdot)\|_r^2 \leq e^{\hat{\chi}_{r+1}(t)} \left[\|\nabla Y_0\|_r^2 + \int_0^t e^{-\hat{\chi}_{r+1}(\tau)} \|\nabla f(\tau, \cdot)\|_r^2 d\tau \right].$$

En intégrant cette inégalité, on obtient :

$$\int_0^{\mathcal{I}} e^{-\hat{\chi}_{r+1}(\tau)} \|\nabla Y(\tau, \cdot)\|_r^2 d\tau \leq \mathcal{I} \|Y_0\|_{r+1}^2 + \int_0^{\mathcal{I}} \int_0^t e^{-\hat{\chi}_{r+1}(\tau)} \|\nabla f(\tau, \cdot)\|_r^2 d\tau dt. \quad (\text{Lem.2.11.xii})$$

Il vient finalement, en tenant compte de (Lem.2.11.xi) avec pour exposant $\bar{\chi}_r$ tel que :

$$\bar{\chi}'_r(t) \geq 1 + 2C_{adv,0}(r+1, d) \|\nabla u(t, \cdot)\|_{\max(r, s_0)},$$

et (Lem.2.11.xii) :

$$\begin{aligned} \|Y\|_{r, \mathcal{I}}^2 + e^{\bar{\chi}_r(\mathcal{I})} \int_0^{\mathcal{I}} e^{-\bar{\chi}_r(t)} \|\nabla Y(t, \cdot)\|_r^2 dt \\ \leq e^{\bar{\chi}_r(\mathcal{I})} \left((1 + \mathcal{I}) \|Y_0\|_{r+1}^2 + \int_0^{\mathcal{I}} e^{-\bar{\chi}_r(t)} \|f\|_{r,t}^2 dt \right). \end{aligned}$$

■

Remarque 2 – Dans le cas $f = 0$ et $r = s$, on a donc l'estimation :

$$\|Y\|_{s, \mathcal{I}}^2 \leq e^{\bar{\chi}_s(\mathcal{I})} (1 + \mathcal{I}) \|Y_0\|_{s+1}^2, \quad (2.9)$$

avec $\bar{\chi}_s(t) \geq 2C_{adv,0}(s+1, d) \int_0^t \|\nabla u\|_s(\tau) d\tau$. En particulier, on peut prendre $\bar{\chi}_s(t) = C_{adv,4}(s, d) \sqrt{t} \|u\|_{s, \mathcal{I}}$, par l'inégalité de *Cauchy-Schwarz*, où on a noté $C_{adv,4}(s, d) = 2C_{adv,0}(s+1, d)$. \diamond

Remarque 3 – On donne ici les expressions des constantes intervenant dans la démonstration :

- $C_{adv,2}(\zeta, d) = \sum_{j=1}^d \sum_{\gamma \leq \zeta - e_j} \binom{\zeta}{\gamma + e_j} C_{Mp}(|\zeta| - 1, |\gamma|, d)$ où les constantes C_{Mp} sont définies dans le **lemme 2.4**.
 - $C_{adv,3}(r, d) = \left[\sum_{|\zeta|=1}^r C_{adv,2}^2(\zeta, d) \right]^{1/2}$.
 - $C_{adv,0}(r, d) = \frac{1}{2} [C_{sob}(\max\{r-1, s_0\}, d) + 2C_{adv,3}(r, d)]$.
- \diamond

Lemme 2.12

Soit $s \geq s_0 + 1$. On considère le système (2.8) avec $f \equiv 0$ et on suppose la condition aux limites $u \cdot \nu|_{\Omega} = 0$.

1. Si $u \in \mathcal{X}_{s, \mathcal{I}}(\Omega)$, alors $\partial_t Y \in \mathcal{X}_{s-1, \mathcal{I}}(\Omega)$.
2. Si $u \in \mathcal{W}_{s, \mathcal{I}}(\Omega)$, alors $\partial_t Y \in \mathcal{W}_{s-1, \mathcal{I}}(\Omega)$.
3. L'unique solution vérifie le principe du maximum.

Démonstration : 1. Avec $\partial_t Y = -u \cdot \nabla Y$, on applique les **corollaires 2.2** et **2.3** pour obtenir $\partial_t Y \in \mathcal{X}_{s-1, \mathcal{I}}(\Omega)$.

2. Le principe est identique au point précédent en adaptant les **corollaires 2.2** et **2.3** aux espaces $\mathcal{W}_{s, \mathcal{I}}(\Omega)$.

3. On a vu que la solution était donnée par (Lem.2.11.iii). Avec $f = 0$, on a immédiatement le principe du maximum, i.e. $Y(t, x) \in [\min Y_0, \max Y_0]$. On peut toutefois démontrer ce résultat autrement. On pose $Y_- = \min(Y, 0) = Y \mathbf{1}_{\{Y \leq 0\}}$. On cherche à prouver que $Y_- = 0$, en supposant que $Y_0 \geq 0$, i.e. $Y_-(0, x) = 0$. D'après le point précédent, Y est de classe \mathcal{C}^1 en espace-temps donc est différentiable par rapport à t et à x , ce qui permet d'appliquer les formules : $\partial_t Y_- = \mathbf{1}_{\{Y \leq 0\}} \partial_t Y$ et $\nabla Y_- = \mathbf{1}_{\{Y \leq 0\}} \nabla Y$ (cf. [41], Lemma 7.6). D'où :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} Y_-^2(t, x) dx \right) &= \int_{\Omega} Y_-(t, x) \partial_t Y(t, x) dx = - \int_{\Omega} Y_-(t, x) \mathbf{u} \cdot \nabla Y(t, x) dx \\ &\quad \text{(Lem.2.12.i)} \\ &= \int_{\Omega} Y(t, x) \nabla \cdot (\mathbf{u} Y_-)(t, x) dx \quad (\text{car } \mathbf{u} \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0) \\ &= \int_{\Omega} Y(t, x) \mathbf{u} \cdot \nabla Y_-(t, x) dx + \int_{\Omega} Y_-^2(t, x) \nabla \cdot \mathbf{u}(t, x) dx. \\ &\quad \text{(Lem.2.12.ii)} \end{aligned}$$

Or, on a $Y_- \nabla Y = Y \nabla Y_-$. D'où, l'égalité entre (Lem.2.12.i) et (Lem.2.12.ii) s'écrit :

$$- \int_{\Omega} Y_-(t, x) \mathbf{u} \cdot \nabla Y(t, x) dx = \int_{\Omega} Y_-(t, x) \mathbf{u} \cdot \nabla Y(t, x) dx + \int_{\Omega} Y_-^2(t, x) \nabla \cdot \mathbf{u}(t, x) dx,$$

soit :

$$- \int_{\Omega} Y_-(t, x) \mathbf{u} \cdot \nabla Y(t, x) dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} Y_-^2(t, x) \nabla \cdot \mathbf{u}(t, x) dx.$$

Il vient enfin :

$$\frac{d}{dt} \|Y_-\|_0^2 = \int_{\Omega} Y_-^2(t, x) \nabla \cdot \mathbf{u}(t, x) dx.$$

Comme $s \geq s_0 + 1$, $\nabla \cdot \mathbf{u} \in L^\infty([0, \mathcal{T}], \mathcal{H}^{s-1}(\Omega)) \subset L^1([0, \mathcal{T}], L^\infty(\Omega))$. D'où :

$$\frac{d}{dt} \|Y_-\|_0^2 \leq |\nabla \cdot \mathbf{u}|_\infty \|Y_-\|_0^2.$$

Par le lemme de Grönwall et en utilisant le fait que $Y_-(0, \cdot) = 0$, il vient $Y(t, \cdot) = 0$. On vérifie que $Z = 1 - Y$ est solution de la même équation. Ainsi, si $Y_0 \leq 1$, ce qui équivaut à $Z_0 \geq 0$, alors, d'après ce qui précède, $Z(t, \cdot) \geq 0$ et $Y(t, \cdot) \leq 1$. D'où, si initialement Y_0 est à valeurs dans $[a, b]$, on pose $Z_0 = \frac{Y_0 - a}{b - a}$ qui est à valeurs dans $[0, 1]$ et on applique ce qui précède pour obtenir $Y \in [a, b]$ pour tout temps. ■

À noter qu'il existe des résultats d'existence pour une régularité affaiblie du champ de vitesse, correspondant au concept de **solutions faibles**. Une **solution faible** de l'équation (2.8) est une fonction $Y \in L^\infty([0, \mathcal{T}] \times \Omega)$ vérifiant l'égalité suivante pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{C}_0^1([0, \mathcal{T}] \times \overline{\Omega})$:

$$\int_0^{\mathcal{T}} \int_{\Omega} Y(\partial_t \phi + \nabla \cdot (\phi \mathbf{u})) dx dt + \int_{\Omega} Y_0(x) \phi(0, x) dx = 0.$$

On suppose ici que \mathbf{u} et $\nabla \cdot \mathbf{u}$ appartiennent à $L^1([0, \mathcal{T}] \times \Omega)$ avec $\mathbf{u} \cdot \nu|_{\Omega} = 0$ et que $Y_0 \in L^\infty(\Omega)$. On a alors l'existence d'une solution faible au système (2.8). Pour l'unicité, on ajoute une hypothèse sur la divergence du champ (dans un espace de Lebesgue à poids). Pour plus de détails, se référer à [23, 30].

Ce type de résultats est une perspective qu'il faudra considérer pour les études à venir sur des données initiales de type bulle. On rappelle que l'on se concentre essentiellement dans ce mémoire sur les données de type Sobolev, même si certains résultats concernent les solutions faibles dans le chapitre 3.

2.5.2 Équations d'advection-diffusion

On poursuit avec un résultat similaire (de type Sobolev) pour les équations de type advection-diffusion, énoncé dans [36] et amélioré ici. On s'intéresse aux systèmes du type :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w} - a \Delta \mathbf{w} = \mathbf{f}, & (2.10a) \\ \mathbf{w}(t = 0, \cdot) = \mathbf{w}_0. & (2.10b) \end{cases}$$

On restreint l'étude au cas d'un domaine périodique, i.e. $\Omega = \mathbb{T}^d$.

Lemme 2.13 (Lemme 3.6, [36])

Soient $\mathbf{w}_0 \in \mathcal{H}^s(\mathbb{T}^d)$, $\mathbf{u} \in \mathcal{X}_{s-1, \mathcal{I}}(\mathbb{T}^d)$, $\mathbf{f} \in \mathcal{X}_{s-2, \mathcal{I}}(\mathbb{T}^d)$ et $a \in \mathcal{X}_{s-1, \mathcal{I}}(\mathbb{T}^d)$ tel qu'il existe $a_1 \in]0, 1[$ vérifiant : $\forall (t, \mathbf{x}) \in]0, +\infty[\times \mathbb{T}^d$, $a_1 \leq a(t, \mathbf{x}) \leq a_1^{-1}$. On suppose $s \geq s_0 + 2$. Alors il existe une unique solution classique $\mathbf{w} \in \mathcal{X}_{s, \mathcal{I}}(\mathbb{T}^d)$ au système (2.10) vérifiant $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \in \mathcal{X}_{s-2, \mathcal{I}}(\mathbb{T}^d)$ ainsi que l'estimation d'énergie pour $r \in \{0, \dots, s\}$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}\|_{r, \mathcal{I}}^2 + e^{\xi_r(\mathcal{I})} \int_0^{\mathcal{I}} e^{-\xi_r(\tau)} \|\nabla \mathbf{w}(\tau, \cdot)\|_r^2 d\tau \\ \leq e^{\xi_r(\mathcal{I})} \left(\|\mathbf{w}_0\|_r^2 + C_{adv-d,0}(d, a_1) \int_0^{\mathcal{I}} e^{-\xi_r(\tau)} \|\mathbf{f}(\tau, \cdot)\|_{r-1}^2 d\tau \right), \end{aligned}$$

pour toute fonction ξ_r vérifiant :

$$\xi_r'(t) \geq \bar{\xi}_r'(t) = C_{adv-d,1}(r, d, a_1) \left(\|\mathbf{u}(t, \cdot)\|_{\max(r-2, s_0)+1}^2 + \|\nabla a(t, \cdot)\|_{\max(r-1, s_0)}^2 + 1 \right).$$

Remarque 4 – Un certain nombre de modifications ont été apportées par rapport au résultat initial donné dans [36].

- Tout d'abord, on constate que la condition $s \geq s_0 + 2$ est nécessaire au cours de la démonstration de ce résultat, alors qu'il était prescrit initialement $s > \frac{d}{2} + 1$ (cf. (Lem.2.13.xiii) par exemple).
- D'autre part, on affaiblit les contraintes sur a en ne supposant plus le coefficient que dans $\mathcal{X}_{s-1, \mathcal{I}}(\mathbb{T}^d)$ au lieu de $\mathcal{X}_{s, \mathcal{I}}(\mathbb{T}^d)$. Ce point est fondamental pour le cas du système DLMN, du fait que les coefficients de diffusion ont une régularité inférieure à celle des solutions des équations d'advection-diffusion.
- De plus, on ajoute ici un degré de liberté supplémentaire dans les estimations d'énergie, en utilisant pour exposant toute fonction ξ_s vérifiant $\xi_s' \geq \bar{\xi}_s'$. On voit en effet dans (Lem.2.13.xii) que l'on peut majorer le coefficient de $\|\mathbf{w}\|_r^2$. Ce point est également primordial pour le cas DLMN.
- Un soin particulier a été donné à l'explicitation des constantes, ce qui permet de « suivre » les contributions de chaque terme.

- Enfin, on a modifié par rapport [36] l'équation dont w^k est solution, afin de pouvoir justifier rigoureusement le caractère borné de la suite (en appliquant l'estimation d'énergie prouvée initialement pour des données suffisamment régulières, ce qui n'était pas possible avec la formulation dans [36]).

À noter enfin que ce résultat a été établi uniquement dans le cas du tore \mathbb{T}^d , *i.e.* des conditions aux limites périodiques. Le cas des domaines bornés quelconques est rendu complexe par les termes de bord dans les intégrations par parties, comme par exemple dans (Lem.2.13.iii). \diamond

Démonstration : La démonstration se décompose en deux parties. La première consiste à démontrer une estimation d'énergie pour des fonctions régulières. On construit ensuite une solution à l'aide d'une suite de type itérées de Picard dont les termes vérifient cette estimation d'énergie. La preuve est semblable, dans les calculs, à celle des **lemmes 2.10** et **2.11**.

Commençons donc par établir une estimation d'énergie dans $\mathcal{X}_{r,\mathcal{S}}(\mathbb{T}^d)$, $0 \leq r \leq s$, en supposant toutes les variables apparaissant dans (2.10a) suffisamment régulières. Effectuons le produit scalaire L^2 de l'équation (2.10a) par w .

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t, \cdot)\|_0^2 + \langle (u \cdot \nabla)w, w \rangle_0 - \langle a\Delta w, w \rangle_0 = \langle f, w \rangle_0. \quad (\text{Lem.2.13.i})$$

Calculons chacun des termes de (Lem.2.13.i). En intégrant par parties, on a :

$$|\langle (u \cdot \nabla)w, w \rangle_0| \leq \frac{|\nabla \cdot u|_\infty}{2} \|w(t, \cdot)\|_0^2. \quad (\text{Lem.2.13.ii})$$

De même, le second terme peut s'écrire :

$$\begin{aligned} -\langle a\Delta w, w \rangle_0 &= -\sum_i \int_{\mathbb{T}^d} a w_i \Delta w_i \, dx = \sum_i \int_{\mathbb{T}^d} \nabla(a w_i) \cdot \nabla w_i \, dx \\ &= \sum_i \int_{\mathbb{T}^d} a |\nabla w_i|^2 \, dx + \sum_i \int_{\mathbb{T}^d} w_i \nabla a \cdot \nabla w_i \, dx. \end{aligned} \quad (\text{Lem.2.13.iii})$$

Sous l'hypothèse que $a \geq a_1$, on a la minoration :

$$\sum_i \int_{\mathbb{T}^d} a |\nabla w_i|^2 \, dx \geq a_1 \int_{\mathbb{T}^d} |\nabla w|^2 \, dx.$$

Les deux résultats (Lem.2.13.ii-Lem.2.13.iii) donnent donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t, \cdot)\|_0^2 + a_1 \|\nabla w(t, \cdot)\|_0^2 \\ \leq \frac{|\nabla \cdot u|_\infty}{2} \|w(t, \cdot)\|_0^2 + |\nabla a|_\infty \|w(t, \cdot)\|_0 \|\nabla w(t, \cdot)\|_0 + \langle f, w \rangle_0. \end{aligned} \quad (\text{Lem.2.13.iv})$$

On applique ensuite l'inégalité de *Cauchy-Schwarz* au dernier terme, puis l'inégalité de *Young*, vraie pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\alpha\beta \leq \frac{1}{2} \left(\varepsilon\alpha^2 + \frac{1}{\varepsilon}\beta^2 \right) \quad (\text{Lem.2.13.v})$$

aux deux derniers termes de (Lem.2.13.iv) (avec $\varepsilon = a_1$) pour obtenir :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t, \cdot)\|_0^2 + a_1 \|\nabla w(t, \cdot)\|_0^2 \\ \leq \frac{\|w(t, \cdot)\|_0^2}{2} \left(|\nabla \cdot u|_\infty + \frac{1}{a_1} |\nabla a|_\infty^2 + \frac{1}{a_1} \right) + \frac{a_1}{2} \|\nabla w(t, \cdot)\|_0^2 + \frac{a_1}{2} \|f(t, \cdot)\|_0^2. \end{aligned}$$

On regroupe les termes en $\nabla \mathbf{w}$ et on simplifie par $\frac{1}{2}$, ce qui donne, du fait que $a_1 < 1$:

$$\begin{aligned} a_1 \left(\frac{d}{dt} \|\mathbf{w}(t, \cdot)\|_0^2 + \|\nabla \mathbf{w}(t, \cdot)\|_0^2 \right) &\leq \frac{d}{dt} \|\mathbf{w}(t, \cdot)\|_0^2 + a_1 \|\nabla \mathbf{w}(t, \cdot)\|_0^2 \\ &\leq \|\mathbf{w}(t, \cdot)\|_0^2 \left(|\nabla \cdot \mathbf{u}|_\infty + \frac{1}{a_1} |\nabla a|_\infty^2 + \frac{1}{a_1} \right) + a_1 \|f(t, \cdot)\|_0^2, \end{aligned}$$

ce dont on déduit, par l'inégalité de Grönwall (cf. **lemme 2.9**) :

$$\|\mathbf{w}(t, \cdot)\|_0^2 + e^{\bar{\xi}_0(t)} \int_0^t e^{-\bar{\xi}_0(\tau)} \|\nabla \mathbf{w}(\tau, \cdot)\|_0^2 d\tau \leq e^{\bar{\xi}_0(t)} \left(\|\mathbf{w}_0\|_0^2 + \int_0^t e^{-\bar{\xi}_0(\tau)} \|f(\tau, \cdot)\|_0^2 d\tau \right),$$

avec $\bar{\xi}_0$ donnée par :

$$\bar{\xi}_0(t) = \frac{1}{a_1} \int_0^t \left(|\nabla \cdot \mathbf{u}|_\infty + \frac{1}{a_1} |\nabla a|_\infty^2 + \frac{1}{a_1} \right) d\tau.$$

Comme précédemment pour l'équation d'advection, l'estimation reste vraie pour toute fonction ζ_0 telle que $\zeta'_0 \geq \bar{\xi}_0$.

Considérons ensuite le cas $r > 0$. Pour $\zeta \in \mathbb{N}^d$ tel que $0 < |\zeta| = k \leq r$, on applique l'opérateur D^ζ à l'équation (2.10). L'équation est alors du même type :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \right) D^\zeta \mathbf{w} - a \Delta D^\zeta \mathbf{w} = f_\zeta, \quad (\text{Lem.2.13.vi})$$

où $f_\zeta = D^\zeta f + [D^\zeta, a] \Delta \mathbf{w} - [D^\zeta, \mathbf{u} \cdot \nabla] \mathbf{w}$. On applique l'inégalité différentielle (**Lem.2.13.iv**) à l'équation (**Lem.2.13.vi**), ce qui donne :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|D^\zeta \mathbf{w}(t, \cdot)\|_0^2 + a_1 \|\nabla D^\zeta \mathbf{w}(t, \cdot)\|_0^2 \\ &\leq \frac{|\nabla \cdot \mathbf{u}|_\infty}{2} \|D^\zeta \mathbf{w}(t, \cdot)\|_0^2 + |\nabla a|_\infty \|D^\zeta \mathbf{w}(t, \cdot)\|_0 \|\nabla D^\zeta \mathbf{w}(t, \cdot)\|_0 + \langle f_\zeta, D^\zeta \mathbf{w} \rangle_0. \quad (\text{Lem.2.13.vii}) \end{aligned}$$

On s'intéresse au dernier terme du membre de droite dans (**Lem.2.13.vii**). On a, en intégrant par parties dans la direction e_j :³

$$|\langle D^\zeta f, D^\zeta \mathbf{w} \rangle_0| \leq |\langle D^{\zeta - e_j} f, D^{\zeta + e_j} \mathbf{w} \rangle_0| \leq \|D^{\zeta - e_j} f\|_0 \|\nabla D^\zeta \mathbf{w}\|_0, \quad (\text{Lem.2.13.viii})$$

où j est tel que $\zeta_j \neq 0$, ce qui est possible car $|\zeta| \neq 0$.⁴ Calculons ensuite le premier crochet de Poisson dans f_ζ , que l'on exprime à l'aide de la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned} [D^\zeta, a] \Delta \mathbf{w} &= D^\zeta (a \Delta \mathbf{w}) - a D^\zeta \Delta \mathbf{w} = \sum_{\substack{\gamma \leq \zeta \\ \gamma \neq 0}} \binom{\zeta}{\gamma} D^\gamma a D^{\zeta - \gamma} \Delta \mathbf{w} \\ &= \sum_{j=1}^d \sum_{\gamma \leq \zeta - e_j} \binom{\zeta}{\gamma + e_j} D^\gamma (\partial_j a) D^{\zeta - \gamma - e_j} (\Delta \mathbf{w}). \end{aligned}$$

³ On aurait pu appliquer *Cauchy-Schwarz* directement mais on souhaite ici abaisser autant que possible la régularité de la donnée f . On verra plus loin que le terme en $\nabla \mathbf{w}$ qui apparaît est à l'origine de l'introduction de l'espace $L^2([0, T], \mathcal{H}^{r+1})$.

⁴ Par exemple $j = \min \{k \in \{1, \dots, d\} : \zeta_k = \min \{\zeta_l : \zeta_l \neq 0\}\}$.

D'où, par l'inégalité de *Cauchy-Schwarz* et en utilisant le **lemme 2.4**, on obtient :

$$\begin{aligned} \left| \langle [D^\zeta, a] \Delta \mathbf{w}, D^\zeta \mathbf{w} \rangle_0 \right| &\leq \| [D^\zeta, a] \Delta \mathbf{w} \|_0 \| D^\zeta \mathbf{w} \|_0 \\ &\leq \sum_{j=1}^d \sum_{\gamma \leq \zeta - e_j} \binom{\zeta}{\gamma + e_j} C_{Mp}(k-1, |\gamma|, d) \|\nabla a\|_{\max(k-1, s_0)} \|\Delta \mathbf{w}\|_{k-1} \|D^\zeta \mathbf{w}\|_0 \\ &\leq C_{adv-d,2}(\zeta, d) \|\nabla a\|_{\max(k-1, s_0)} \|\nabla \mathbf{w}\|_k \|D^\zeta \mathbf{w}\|_0. \quad (\text{Lem.2.13.ix}) \end{aligned}$$

Exprimons ensuite le second crochet de Poisson de f_ζ . Comme précédemment, on a :

$$([D^\zeta, \mathbf{u} \cdot \nabla] \mathbf{w})_i = \sum_{j,p} \sum_{\gamma \leq \zeta - e_j} \binom{\zeta}{\gamma + e_j} D^\gamma (\partial_j \mathbf{u}_p) D^{\zeta - \gamma - e_j} (\partial_p \mathbf{w}_i).$$

On en déduit en intégrant par parties que le produit scalaire concerné se récrit :

$$\begin{aligned} \langle [D^\zeta, \mathbf{u} \cdot \nabla] \mathbf{w}, D^\zeta \mathbf{w} \rangle_0 &= \sum_{i,j,p} \sum_{\gamma \leq \zeta - e_j} \binom{\zeta}{\gamma + e_j} \langle D^\gamma (\partial_j \mathbf{u}_p), D^{\zeta - \gamma - e_j} (\partial_p \mathbf{w}_i) D^\zeta \mathbf{w}_i \rangle_0 \\ &= - \sum_{\substack{i,j,p,\gamma \\ \gamma \leq \zeta - e_j}} \binom{\zeta}{\gamma + e_j} \langle D^\gamma \mathbf{u}_p, \partial_j (D^{\zeta - \gamma - e_j} (\partial_p \mathbf{w}_i) D^\zeta \mathbf{w}_i) \rangle_0 \\ &= - \sum_{\substack{i,j,p,\gamma \\ \gamma \leq \zeta - e_j}} \binom{\zeta}{\gamma + e_j} \left[\langle D^\gamma \mathbf{u}_p D^{\zeta - \gamma - e_j} (\partial_j \partial_p \mathbf{w}_i), D^\zeta \mathbf{w}_i \rangle_0 \right. \\ &\quad \left. + \langle D^\gamma \mathbf{u}_p D^{\zeta - \gamma - e_j} (\partial_p \mathbf{w}_i), D^\zeta (\partial_j \mathbf{w}_i) \rangle_0 \right] \\ &\leq d^2 C_{adv-d,2}(\zeta, d) \|\mathbf{u}\|_{\max(k-1, s_0)} \left[\|D^\zeta \mathbf{w}\|_0 \|\nabla \mathbf{w}\|_k + \|D^\zeta \nabla \mathbf{w}\|_0 \|\nabla \mathbf{w}\|_{k-1} \right], \quad (\text{Lem.2.13.x}) \end{aligned}$$

en concluant avec *Cauchy-Schwarz* sur chaque produit scalaire et le **lemme 2.4** pour les termes de produit résultants. En injectant les diverses inégalités (**Lem.2.13.viii**) à (**Lem.2.13.x**) dans (**Lem.2.13.vii**), on obtient, en omettant la dépendance en temps :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|D^\zeta \mathbf{w}\|_0^2 + a_1 \|\nabla D^\zeta \mathbf{w}\|_0^2 &\leq \frac{|\nabla \cdot \mathbf{u}|_\infty}{2} \|D^\zeta \mathbf{w}\|_0^2 + |\nabla a|_\infty \|D^\zeta \mathbf{w}\|_0 \|\nabla D^\zeta \mathbf{w}\|_0 \\ &\quad + \|D^{\zeta - e_j} \mathbf{f}\|_0 \|D^\zeta \nabla \mathbf{w}\|_0 + C_{adv-d,2}(\zeta, d) \|\nabla a\|_{\max(k-1, s_0)} \|\nabla \mathbf{w}\|_k \|D^\zeta \mathbf{w}\|_0 \\ &\quad + d^2 C_{adv-d,2}(\zeta, d) \|\mathbf{u}\|_{\max(k-1, s_0)} \left[\|D^\zeta \mathbf{w}\|_0 \|\nabla \mathbf{w}\|_k + \|D^\zeta \nabla \mathbf{w}\|_0 \|\mathbf{w}\|_k \right]. \end{aligned}$$

En sommant pour $\zeta \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\zeta| = k$ puis pour $k \in \{1, \dots, r\}$ et enfin en additionnant (**Lem.2.13.iv**), on obtient (en utilisant l'inégalité de *Cauchy-Schwarz* discrète) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{w}\|_r^2 + a_1 \|\nabla \mathbf{w}\|_r^2 &\leq \frac{|\nabla \cdot \mathbf{u}|_\infty}{2} \|\mathbf{w}\|_r^2 + |\nabla a|_\infty \|\mathbf{w}\|_r \|\nabla \mathbf{w}\|_r + \|\mathbf{f}\|_{r-1} \|\nabla \mathbf{w}\|_r \\ &\quad + \|\mathbf{f}\|_0 \|\mathbf{w}\|_0 + \bar{C}_{adv-d,2}(r, d) \|\nabla a\|_{\max(r-1, s_0)} \|\nabla \mathbf{w}\|_r \|\mathbf{w}\|_r \\ &\quad + 2d^2 \bar{C}_{adv-d,2}(r, d) \|\mathbf{u}\|_{\max(r-1, s_0)} \|\mathbf{w}\|_r \|\nabla \mathbf{w}\|_r. \quad (\text{Lem.2.13.xi}) \end{aligned}$$

$\bar{C}_{adv-d,2}(r, d)$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^{[1,r]^d}$ du vecteur de composantes $C_{adv-d,2}(\zeta, d)$.

On applique ensuite l'inégalité de *Young* (Lem.2.13.v) à chacun des termes. Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{w}\|_r^2 + a_1 \|\nabla \mathbf{w}\|_r^2 &\leq \|\mathbf{w}\|_r^2 \left[\frac{|\nabla \cdot \mathbf{u}|_\infty}{2} + \frac{|\nabla a|_\infty^2}{2\varepsilon_1} + \frac{\overline{C}_{adv-d,2}(r,d)^2}{2\varepsilon_4} \|\nabla a\|_{\max(r-1,s_0)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{4d^4 \overline{C}_{adv-d,2}(r,d)^2}{2\varepsilon_5} \|\mathbf{u}\|_{\max(r-1,s_0)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_3} \right] \\ &\quad + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5}{2} \|\nabla \mathbf{w}\|_r^2 + \left(\frac{\varepsilon_3}{2} + \frac{1}{2\varepsilon_2} \right) \|f\|_{r-1}^2. \end{aligned}$$

On choisit $\varepsilon_3 = 1$ et $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \frac{a_1}{4}$ de sorte que $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_5 = a_1$. On simplifie par $\frac{1}{2}$, puis on utilise l'inclusion de Sobolev $\mathcal{H}^{\max(r-1,s_0)} \subset L^\infty$ pour majorer $|\nabla a|_\infty$, ce qui fournit⁵

$$\begin{aligned} &a_1 \left(\frac{d}{dt} \|\mathbf{w}\|_r^2 + \|\nabla \mathbf{w}\|_r^2 \right) \\ &\leq \left(1 + \frac{4}{a_1} \right) \|f\|_{r-1}^2 + \|\mathbf{w}\|_r^2 \left[\underbrace{\frac{4 \left(C_{sob}(\max(r-1,s_0),d)^2 + \overline{C}_{adv-d,2}(r,d)^2 \right)}{a_1}}_{C_{adv-d,3}(r,d,a_1)} \|\nabla a\|_{\max(r-1,s_0)}^2 \right. \\ &\quad \left. + |\nabla \cdot \mathbf{u}|_\infty + \frac{16d^4 \overline{C}_{adv-d,2}(r,d)^2}{a_1} \|\mathbf{u}\|_{\max(r-1,s_0)}^2 + 1 \right]. \quad (\text{Lem.2.13.xii}) \end{aligned}$$

Par l'inégalité de *Grönwall*, il vient :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}\|_{r,\mathcal{I}}^2 + e^{\bar{\xi}_r(\mathcal{I})} \int_0^{\mathcal{I}} e^{-\bar{\xi}_r(\tau)} \|\nabla \mathbf{w}(\tau, \cdot)\|_r^2 d\tau \\ \leq e^{\bar{\xi}_r(\mathcal{I})} \left(\|\mathbf{w}_0\|_r^2 + C_{adv-d,0}(a_1,d) \int_0^{\mathcal{I}} e^{-\bar{\xi}_r(\tau)} \|f(\tau, \cdot)\|_{r-1}^2 d\tau \right), \end{aligned}$$

où $C_{adv-d,0}(a_1,d) = \frac{1}{a_1} + \frac{4}{a_1^2}$. Pour ce qui est de l'exposant, on peut prendre :

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_r(t) = \frac{1}{a_1} \int_0^t \left(|\nabla \cdot \mathbf{u}|_\infty + \frac{16d^4 \overline{C}_{adv-d,2}(r,d)^2}{a_1} \|\mathbf{u}\|_{\max(r-1,s_0)}^2 \right. \\ \left. + C_{adv-d,3}(r,d,a_1) \|\nabla a\|_{\max(r-1,s_0)}^2 + 1 \right). \end{aligned}$$

Cependant, avec $\mathbf{u} \in \mathcal{X}_{s-1,\mathcal{I}}(\mathbb{T}^d)$ et $s \geq s_0 + 2$, on a $\nabla \cdot \mathbf{u} \in \mathcal{X}_{s_0,\mathcal{I}}(\mathbb{T}^d)$. D'où :

$$\begin{aligned} |\nabla \cdot \mathbf{u}|_\infty &\leq C_{sob}(s_0,d) \|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_{s_0} \leq C_{sob} \|\mathbf{u}\|_{\max(r-2,s_0)+1} \\ &\leq 1 + \frac{C_{sob}^2 \|\mathbf{u}\|_{\max(r-2,s_0)+1}^2}{4}. \quad (\text{Lem.2.13.xiii}) \end{aligned}$$

On peut donc prendre, en majorant dans (Lem.2.13.xii) :

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_r(t) = \frac{1}{a_1} \int_0^t \left[\left(\frac{16d^4 \overline{C}_{adv-d,2}(r,d)^2}{a_1} + \frac{C_{sob}(s_0,d)^2}{4} \right) \|\mathbf{u}\|_{\max(r-2,s_0)+1}^2 \right. \\ \left. + C_{adv-d,3}(r,d,a_1) \|\nabla a\|_{\max(r-1,s_0)}^2 + 2 \right]. \end{aligned}$$

⁵ L'inégalité est vraie dans L^2 , car avec $a \in \mathcal{X}_{s-1,\mathcal{I}}(\mathbb{T}^d)$, $\|\nabla a\|_{s-1}$ est bornée dans L^2 .

En particulier, si $r = s$, avec $s - 2 \geq s_0$, on a :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}\|_{s,\mathcal{D}}^2 &\leq \|\mathbf{w}\|_{s,\mathcal{D}}^2 + e^{\bar{\xi}_s(\mathcal{D})} \int_0^{\mathcal{D}} e^{-\bar{\xi}_s(\tau)} \|\nabla \mathbf{w}(\tau, \cdot)\|_s^2 d\tau \\ &\leq e^{\bar{\xi}_s(\mathcal{D})} \left(\|\mathbf{w}_0\|_s^2 + C_{adv-d,0}(a_1, d) \int_0^{\mathcal{D}} e^{-\bar{\xi}_s(\tau)} \|\mathbf{f}(\tau, \cdot)\|_{s-1}^2 d\tau \right), \quad (\text{Lem.2.13.xiv}) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_s(t) &= \underbrace{C_{adv-d,1}(s, d, a_1)}_{\frac{1}{a_1} \max\left\{C_{adv-d,3}(s, d, a_1), \frac{16d^4 \bar{C}_{adv-d,2}(s, d)^2}{a_1} + \frac{C_{sob}(s_0, d)^2}{4}, 2\right\}} \times \int_0^t \left[\|\mathbf{u}\|_{s-1}^2 + \|\nabla a\|_{s-1}^2 + 1 \right] d\tau. \end{aligned}$$

On peut déduire de ce qui précède une estimation en norme $\mathcal{W}_{s,\mathcal{D}}(\mathbb{T}^d)$ pour la solution. En effet, si l'on souhaite garder une régularité identique pour \mathbf{w} et \mathbf{f} , on majore $\langle D^\zeta \mathbf{f}, D^\zeta \mathbf{w} \rangle_0$ par $\|D^\zeta \mathbf{f}\|_0 \|D^\zeta \mathbf{w}\|_0$ au lieu de (Lem.2.13.viii), que l'on injecte dans (Lem.2.13.xi). On choisit les paramètres ε_i de sorte que les termes en $\|\nabla \mathbf{w}\|_s^2$ s'éliminent, et on obtient :

$$\|\mathbf{w}\|_{s,\mathcal{D}} \leq e^{\bar{\eta}_s(\mathcal{D})} \left(\|\mathbf{w}_0\|_s + \int_0^{\mathcal{D}} e^{-\bar{\eta}_s(\tau)} \|\mathbf{f}(\tau, \cdot)\|_s d\tau \right), \quad (\text{Lem.2.13.xv})$$

où :

$$\bar{\eta}_s(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \left(\|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_\infty + \frac{6d^4 \bar{C}_{adv-d,2}(s, d)^2}{a_1} \|\mathbf{u}\|_{s-1}^2 + \frac{3}{8} C_{adv-d,3}(s, d, a_1) \|\nabla a\|_{s-1}^2 \right) d\tau.$$

On se propose maintenant de prouver l'existence d'une solution de l'équation (2.10) par la méthode de Galerkin. Pour cela, on utilise la base hilbertienne classique de l'espace $L^2(\mathbb{T}^d)$, à savoir :

$$\varphi_m(\mathbf{x}) = \exp(2i\pi \boldsymbol{\theta}_m \cdot \mathbf{x}) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^d), \quad \text{avec } \boldsymbol{\theta}_m \in \mathbb{N}^d.$$

On vérifie facilement que la famille (φ_m) est orthogonale dans $\mathcal{H}^r(\mathbb{T}^d)$ pour tout $r \in \mathbb{N}$. On a en effet :

$$\forall u \in \mathcal{H}^r(\mathbb{T}^d), \langle u, \varphi_m \rangle_r = \left(\sum_{|\alpha| \leq r} (2\pi)^{2|\alpha|} \boldsymbol{\theta}_m^{2\alpha} \right) \langle u, \varphi_m \rangle_0.$$

On note \mathcal{F}_k la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T}^d)$ sur $\mathcal{V}_k = \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$. On déduit de ce qui précède que $(\mathcal{F}_k)_{|\mathcal{H}^r}$ est la projection orthogonale de $\mathcal{H}^r(\mathbb{T}^d)$ sur \mathcal{V}_k , et que \mathcal{F}_k permute avec les dérivées spatiales. On a de plus, pour tout r :

$$\|\mathcal{F}_k(\mathbf{f})\|_r \leq \|\mathbf{f}\|_r \quad \text{et} \quad \|\mathcal{F}_k(\mathbf{f}) - \mathbf{f}\|_r \leq \|\mathbf{f}\|_r.$$

On considère alors le problème "discret" d'inconnue $\mathbf{w}^k \in \mathcal{V}_k$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{w}^k}{\partial t} + [\mathcal{F}_k(\mathbf{u}) \cdot \nabla] \mathbf{w}^k - \mathcal{F}_k(a) \Delta \mathbf{w}^k = \mathcal{F}_k(\mathbf{f}), \\ \mathbf{w}^k(t=0, \cdot) = \mathcal{F}_k(\mathbf{w}_0). \end{cases} \quad (\text{Lem.2.13.xvi})$$

Le fait que $\mathbf{w}^k \in \mathcal{V}_k$ implique une décomposition de la forme $\mathbf{w}_i^k(t, \mathbf{x}) = \sum_{m=1}^k \lambda_{i,m}(t) \varphi_m(\mathbf{x})$.

Le système (Lem.2.13.xvi) n'est autre qu'un système linéaire d'équations différentielles ordi-

naires d'inconnues $\lambda_{i,m}$. En effet, le produit scalaire L^2 de l'EDP dans (Lem.2.13.xvi) par φ_m donne pour $m \leq k$:

$$\begin{cases} \lambda'_{i,m}(t) + \sum_{j=1}^k \langle [\mathcal{F}_k(\mathbf{u}) \cdot \nabla] \varphi_j - \mathcal{F}_k(a) \Delta \varphi_j, \varphi_m \rangle_0 \lambda_{i,j}(t) = \langle f_i, \varphi_m \rangle_0, \\ \lambda_{i,m}(0) = \langle \mathbf{w}_{0,i}, \varphi_m \rangle_0. \end{cases} \quad (\text{Lem.2.13.xvii})$$

On a utilisé le fait que $\langle f_i, \varphi_m \rangle_0 = \langle \mathcal{F}_k(f_i), \varphi_m \rangle_0 + \underbrace{\langle f_i - \mathcal{F}_k(f_i), \varphi_m \rangle_0}_{\in \mathcal{V}_k^\perp} = \langle \mathcal{F}_k(f_i), \varphi_m \rangle_0$.

Comme \mathbf{u} , a et f sont dans $\mathcal{C}^0([0, \mathcal{I}], L^2(\mathbb{T}^d))$ et comme $\varphi_m \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^d)$, la continuité de l'opérateur de projection \mathcal{F}_k garantit la continuité des coefficients de l'EDO linéaire (Lem.2.13.xvii). On obtient par le théorème de Cauchy l'existence et l'unicité des solutions $\lambda_{i,m} \in \mathcal{C}^1(0, \mathcal{I})$ de (Lem.2.13.xvii), ce qui justifie, par construction, que $\mathbf{w}^k \in \mathcal{C}^1([0, \mathcal{I}], \mathcal{H}^r(\mathbb{T}^d))$ pour tout $r \in \mathbb{N}$.

Par ailleurs, on montre que la suite est uniformément bornée. Les coefficients de (Lem.2.13.xvi) étant suffisamment réguliers, on peut appliquer l'estimation (Lem.2.13.xiv), en remplaçant r par s , \mathbf{u} par $\mathcal{F}_k(\mathbf{u})$, a par $\mathcal{F}_k(a)$ et f par $\mathcal{F}_k(f)$. On utilise les majorations des normes $\|\mathcal{F}_k(*)\|_{s-1}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}^k(t, \cdot)\|_s^2 + e^{\bar{\xi}_s(t)} \int_0^t e^{-\bar{\xi}_s(\tau)} \|\nabla \mathbf{w}^k(\tau, \cdot)\|_s^2 d\tau \\ \leq e^{\bar{\xi}_s(t)} \left(\|\mathbf{w}_0\|_s^2 + C_{adv-d,0} \int_0^t e^{-\bar{\xi}_s(\tau)} \|f(\tau, \cdot)\|_{s-1}^2 d\tau \right). \quad (\text{Lem.2.13.xviii}) \end{aligned}$$

On rappelle qu'ici $s \geq s_0 + 2$.⁶ L'estimation (Lem.2.13.xviii) montre alors que la suite (\mathbf{w}^k) est bornée dans $L^\infty([0, \mathcal{I}], \mathcal{H}^s(\mathbb{T}^d)) \cap L^2([0, \mathcal{I}], \mathcal{H}^{s+1}(\mathbb{T}^d))$. Or, d'après l'équation (Lem.2.13.xvi), on a :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \mathbf{w}^k}{\partial t}(t, \cdot) \right\|_0 &\leq \left\| [\{\mathcal{F}_k(\mathbf{u}) \cdot \nabla\} \mathbf{w}^k - \mathcal{F}_k(a) \Delta \mathbf{w}^k - \mathcal{F}_k(f)](t, \cdot) \right\|_0 \\ &\leq \|\mathbf{u}\|_{0,\mathcal{I}} \|\nabla \mathbf{w}^k\|_\infty + \|a\|_{0,\mathcal{I}} \|\Delta \mathbf{w}^k\|_\infty + \|f\|_{0,\mathcal{I}} \\ &\leq C_{sob}(s_0, d) \|\mathbf{u}\|_{0,\mathcal{I}} \|\nabla \mathbf{w}^k\|_{s-2} + \|a\|_{0,\mathcal{I}} \|\Delta \mathbf{w}^k\|_{s-2} + \|f\|_{0,\mathcal{I}}. \end{aligned}$$

On déduit de la note de bas de page 6 sur les injections de Sobolev et du caractère borné de la suite (\mathbf{w}^k) que la suite $(\partial_t \mathbf{w}^k)$ est bornée dans $L^\infty([0, \mathcal{I}], L^2(\mathbb{T}^d))$. Ceci prouve que la suite (\mathbf{w}^k) est bornée et équicontinue⁷ dans $\mathcal{C}^0([0, \mathcal{I}], L^2(\mathbb{T}^d))$.

Le théorème d'Arzela-Ascoli assure alors l'existence d'une sous-suite de (\mathbf{w}^k) , que l'on note encore (\mathbf{w}^k) , qui converge fortement dans $\mathcal{C}^0([0, \mathcal{I}], L^2(\mathbb{T}^d))$. De plus, cette sous-suite converge faiblement dans $L^2([0, \mathcal{I}], \mathcal{H}^{s+1}(\mathbb{T}^d))$ et faiblement- $*$ dans $L^\infty([0, \mathcal{I}], \mathcal{H}^s(\mathbb{T}^d))$ car bornée dans ces deux espaces. Notons $\mathbf{w} \in \mathcal{X}_{s,\mathcal{I}}(\mathbb{T}^d)$ la limite faible- $*$ de la sous-suite dans chaque espace. Comme \mathbf{w}^k satisfait l'estimation (Lem.2.13.xviii), alors \mathbf{w} vérifie bien (Lem.2.13.xiv). On sait de plus que $\mathbf{w}^k \in \mathcal{C}^0([0, \mathcal{I}], L^2(\mathbb{T}^d))$ vérifie :

$$\mathbf{w}^k(t, \cdot) = \mathcal{F}_k \mathbf{w}_0 + \int_0^t [-\{\mathcal{F}_k(\mathbf{u}) \cdot \nabla\} \mathbf{w}^k + \mathcal{F}_k(a) \Delta \mathbf{w}^k + \mathcal{F}_k(f)](\tau, \cdot) d\tau$$

dans $L^2(\mathbb{T}^d)$. Or, a , \mathbf{u} et f sont dans $\mathcal{C}^0([0, \mathcal{I}], L^2(\mathbb{T}^d))$ et \mathbf{w}^k converge fortement vers \mathbf{w}

⁶ Ce qui assure l'inclusion $\mathcal{H}^{s-2} \subset L^\infty$.

⁷ On rappelle que \mathbf{w}^k est dans $\mathcal{C}^1([0, \mathcal{I}], L^2(\mathbb{T}^d))$.

dans cet espace. De plus, $\mathcal{F}_k(\cdot)$ converge vers \cdot dans L^2 . On en déduit que l'intégrande y est uniformément borné et converge simplement vers $-(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{w} + a\Delta\mathbf{w} + \mathbf{f}$. Par le théorème de convergence dominée, \mathbf{w} est solution de :

$$\mathbf{w}(t, \cdot) = \mathbf{w}_0 + \int_0^t [-(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{w} + a\Delta\mathbf{w} + \mathbf{f}](\tau, \cdot) d\tau.$$

Ceci implique que \mathbf{w} vérifie :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{w} + a\Delta\mathbf{w} + \mathbf{f}, \\ \mathbf{w}(t=0, \cdot) = \mathbf{w}_0. \end{cases}$$

Le membre de droite est dans $\mathcal{X}_{s-2, \mathcal{T}}(\mathbb{T}^d)$, ce qui justifie que $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \in \mathcal{X}_{s-2, \mathcal{T}}(\mathbb{T}^d)$. ■

On conclut ce paragraphe par un lemme d'équivalence entre EDO et équation d'advection-diffusion à données homogènes en espace.

Lemme 2.14

Pour $p_0 \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+)$, on introduit l'EDO :

$$\begin{cases} p'(t) = f(t), \\ p(0) = p_0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Si \mathbf{u} est un champ de $\mathcal{X}_{s_0+1, \mathcal{T}}(\mathbb{T}^d)$ tel que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0$ dans un domaine Ω borné, alors quelle que soit la constante $\kappa \geq 0$, toute solution régulière du système :

$$\begin{cases} \partial_t p + \mathbf{u} \cdot \nabla p - \kappa \Delta p = f(t), \\ \nabla p \cdot \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0, \\ p(0, \mathbf{x}) = p_0, \end{cases} \quad (2.12)$$

est solution de (2.11).

Ce lemme est utilisé pour unifier le comportement (*i.e.* solutions d'équations d'advection-diffusion) des variables Y_i , T et p dans le cadre de l'étude sur la combustion (*cf.* §2.6) ou simplement des variables T et p dans le cadre du système DLMN.

Démonstration : La preuve repose sur l'estimation d'énergie associée à la variable ∇p pour p vérifiant (2.12). L'existence et l'unicité de la solution de (2.12) est garantie par le **lemme 2.13**. De plus, en appliquant l'opérateur ∇ à l'EDP, puis en appliquant le produit scalaire avec ∇p , il vient :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla p\|_0^2 + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \nabla p \cdot \nabla p \, dx + \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \frac{|\nabla p|^2}{2} \, dx - \kappa \int_{\Omega} \nabla p \cdot \Delta \nabla p \, dx = 0.$$

On intègre par parties les deux derniers termes, ce qui fournit l'égalité :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla p\|_0^2 = - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \nabla p \cdot \nabla p \, dx + \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \frac{|\nabla p|^2}{2} \, dx - \kappa \int_{\Omega} (\Delta p)^2 \, dx.$$

Le dernier terme étant négatif, il vient :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla p\|_0^2 \leq \left[\|\nabla \mathbf{u}\|_\infty + \frac{|\nabla \cdot \mathbf{u}|_\infty}{2} \right] \|\nabla p\|_0^2.$$

On conclut avec le lemme de *Grönwall* et le fait que $\|\nabla p_0\|_0 = 0$. ■

2.5.3 Équations elliptiques

On rappelle ici quelques résultats de régularité elliptique pour le laplacien et l'opérateur de divergence. Voir par exemple [11, 21].

Lemme 2.15

Pour $f \in \mathcal{H}^s(\Omega)$ et $g \in \mathcal{H}^{s-1/2}(\partial\Omega)$, sous la condition de compatibilité :

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0,$$

il existe une infinité de solutions dans $\mathcal{H}^{s+2}(\Omega)$, égales entre elles à une constante additive près, à l'équation de Laplace-Neumann :

$$\begin{cases} -\Delta\phi = f, \\ \nabla\phi \cdot \nu|_{\partial\Omega} = g, \end{cases}$$

et vérifiant l'estimation :

$$\|\nabla\phi\|_{s+1} \leq C_{ell}(s, d, \Omega) \left(\|f\|_{s, \Omega} + \|g\|_{s-1/2, \partial\Omega} \right).$$

On présente ensuite un résultat particulier pour l'équation vérifiée par la pression dans le système de Navier-Stokes incompressible. Ce résultat a été prouvé dans [36], mais on clarifie certains points ici.

Lemme 2.16 (Lemme 3.4, [36])

Soient $\rho \in W^{s, \infty}(\mathbb{T}^d)$ (vérifiant pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d$ $\rho_1 \leq \rho(\mathbf{x}) \leq \rho_1^{-1}$, avec $\rho_1 \in]0, 1[$), et $f \in \mathcal{H}^{s-1}(\mathbb{T}^d)$. On suppose de plus que f vérifie l'équation de compatibilité :

$$\int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0. \quad (2.13a)$$

Alors l'unique solution de moyenne nulle de :

$$\nabla \cdot (\rho^{-1} \nabla \pi) = f. \quad (2.13b)$$

appartient à $\mathcal{H}^{s+1}(\mathbb{T}^d)$ et satisfait les inégalités suivantes, pour tout $s \geq 1$:

$$\|\rho^{-1} \nabla \pi\|_s \leq C_{ell,1}(s, d) \|f\|_{s-1}, \quad (2.13c)$$

$$\|\nabla \pi\|_s \leq C_{ell,2}(s, d, \rho, \rho_1) \|\rho f\|_{s-1}. \quad (2.13d)$$

Démonstration : On sait de manière classique que sous l'hypothèse de compatibilité (2.13a) pour $f \in L^2(\mathbb{T}^d)$, il existe une unique solution $\pi \in \mathcal{H}^1$ (à une constante additive près) au système (2.13b). On peut en particulier choisir la constante de sorte que π soit d'intégrale nulle. L'inégalité de Poincaré-Wirtinger fournit donc :

$$\|\pi\|_0 \leq C_{PW} \|\nabla \pi\|_0.$$

Démontrons tout d'abord une estimation dans L^2 . La formulation variationnelle associée à l'EDP (2.13b), i.e. :

$$\forall \phi \in \mathcal{H}^1, - \int_{\mathbb{T}^d} \rho^{-1}(x) \nabla \pi \cdot \nabla \phi \, dx = \int_{\mathbb{T}^d} f(x) \phi(x) \, dx,$$

donne pour le cas particulier $\phi = \pi$, avec $\rho_1 \leq \rho^{-1} \leq \rho_1^{-1}$:

$$\rho_1 \|\nabla \pi\|_0^2 \leq \int_{\mathbb{T}^d} \rho^{-1}(x) |\nabla \pi|^2 \, dx = - \int_{\mathbb{T}^d} \rho^{-1}(x) \rho(x) f(x) \pi(x) \, dx \leq \rho_1^{-1} \|\rho f\|_0 \|\pi\|_0.$$

Par l'inégalité de Poincaré-Wirtinger, il vient :

$$\|\nabla \pi\|_0 \leq \frac{C_{PW}(d)}{\rho_1^2} \|\rho f\|_0. \quad (\text{Lem.2.16.i})$$

Prouvons maintenant la majoration (2.13d), la majoration (2.13c) étant classique (régularité elliptique). Pour $s \geq 1$, $\pi \in \mathcal{H}^{s+1}$ et l'équation (2.13b) est équivalente à la suivante :

$$\Delta \pi = \nabla(\ln \rho) \cdot \nabla \pi + \rho f.$$

On a alors l'estimation de régularité elliptique (cf. **lemme 2.15**) :

$$\|\nabla \pi\|_s \leq C_{ell}(s, d) \|\nabla(\ln \rho) \cdot \nabla \pi + \rho f\|_{s-1}. \quad (\text{Lem.2.16.ii})$$

Dans le cas $s = 1$, on a :

$$\|\nabla(\ln \rho) \cdot \nabla \pi\|_0 \leq \|\nabla(\ln \rho)\|_\infty \|\nabla \pi\|_0.$$

On obtient (2.13d) en combinant cette dernière inégalité avec (Lem.2.16.i). La constante apparaissant dans (2.13d) est alors :

$$C_{ell,2}(s = 1, d, \rho, \rho_1) = C_{ell}(1, d) \left(\frac{C_{PW}}{\rho_1^2} \|\nabla(\ln \rho)\|_\infty + 1 \right).$$

Dans les cas $s > 1$, on utilise l'inégalité de Moser (2.1) et l'inégalité d'interpolation (cf. **lemme 2.5**) :

$$\begin{aligned} \|\nabla(\ln \rho) \cdot \nabla \pi\|_{s-1} &\leq C_M(s-1, d) \|\nabla(\ln \rho)\|_{\max(s-1, s_0)} \|\nabla \pi\|_{s-1} \\ &\leq C_M(s-1, d) \|\nabla(\ln \rho)\|_{\max(s-1, s_0)} \|\nabla \pi\|_0^{1/s} \|\nabla \pi\|_s^{1-1/s} \\ &\leq \varepsilon \|\nabla \pi\|_s \\ &\quad + \frac{C_M(s-1, d)^s}{s} \|\nabla(\ln \rho)\|_{\max(s-1, s_0)}^s \left(\frac{s-1}{\varepsilon s} \right)^{s-1} \frac{C_{PW}(d)}{\rho_1^2} \|\rho f\|_{s-1}. \end{aligned}$$

Cette inégalité est vraie pour tout $\varepsilon > 0$, par l'inégalité de Young.⁸

⁸ Qui prend la forme ici pour tous a, b et ε strictement positifs : $a\beta \leq \frac{a^p}{p(q\varepsilon)^{p/q}} + \varepsilon\beta^q$, $p = s$ et $q = \frac{s}{s-1}$.

Démonstration : *Démontrons tout d'abord l'implication (2.14) \implies (2.15).* On applique l'opérateur \mathcal{P} à l'équation (2.14a) préalablement divisée par ρ . Ainsi, en utilisant l'identité $\mathcal{P} = \mathcal{I}d - \mathcal{Q}$, on obtient :

$$(\mathcal{I}d - \mathcal{Q}) \left(\frac{\partial w}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) w \right) = \frac{1}{\rho Re} \Delta w - \mathcal{Q} \left(\frac{1}{\rho Re} \Delta w \right) - \mathcal{P} \left(\frac{1}{\rho} (\nabla \pi + f) \right). \quad (\text{Lem.2.17.i})$$

Or, l'équation (2.14b) donne les relations :

$$\mathcal{P}w = w \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}w = 0. \quad (\text{Lem.2.17.ii})$$

La régularité supposée de w fournit alors :

$$\mathcal{Q} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{Q}w}{\partial t} = 0.$$

On remplace enfin w par $\mathcal{P}w$ dans les deux termes de projection sur le champ de gradients dans (Lem.2.17.i) pour obtenir (2.15a).

De la même manière, en appliquant l'opérateur divergence à l'équation (2.14a) divisée par ρ , on obtient, toujours en tenant compte de (Lem.2.17.ii) :

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} (\nabla \pi + f) \right) = \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho Re} \Delta w - \frac{Dw}{Dt} \right) = \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho Re} \Delta \mathcal{P}w - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathcal{P}w \right). \quad (\text{Lem.2.17.iii})$$

On déduit alors de (Lem.2.17.iii) l'équation (2.15b), en tenant compte des identités :

$$\begin{cases} \nabla \cdot ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathcal{P}w) = \mathbf{u} \cdot \nabla (\nabla \cdot \mathcal{P}w) + {}^t \nabla \mathbf{u} :: \nabla \mathcal{P}w = {}^t \nabla \mathbf{u} :: \nabla \mathcal{P}w, \\ \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \Delta \mathcal{P}w \right) = \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \right) \cdot \Delta \mathcal{P}w + \frac{1}{\rho} \Delta (\nabla \cdot \mathcal{P}w) = \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \right) \cdot \Delta \mathcal{P}w. \end{cases} \quad (\text{Lem.2.17.iv})$$

Démontrons ensuite l'implication (2.15) \implies (2.14). On récrit tout d'abord l'équation (2.15a) sous les formes suivantes, en décomposant $w = \mathcal{P}w + \mathcal{Q}w$ et en utilisant $\mathcal{I}d - \mathcal{Q} = \mathcal{P}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) w - \frac{1}{\rho Re} \Delta w + \frac{1}{\rho} (\nabla \pi + f) \\ = \mathcal{Q} \left((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathcal{P}w - \frac{1}{\rho Re} \Delta \mathcal{P}w + \frac{1}{\rho} (\nabla \pi + f) \right), \quad (\text{Lem.2.17.v}) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\mathcal{P} \left((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathcal{P}w - \frac{1}{\rho Re} \Delta \mathcal{P}w + \frac{1}{\rho} (\nabla \pi + f) \right) - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathcal{Q}w + \frac{1}{\rho Re} \Delta \mathcal{Q}w. \quad (\text{Lem.2.17.vi})$$

Le produit scalaire $L^2(\mathbb{T}^d)$ de l'équation (Lem.2.17.vi) par $\mathcal{Q}w$ fournit l'égalité suivante, en tenant compte du fait que $\langle \mathcal{P}*, \mathcal{Q}* \rangle_0 = 0$:¹⁰

$$\langle \partial_t w, \mathcal{Q}w \rangle_0 = -\langle (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathcal{Q}w, \mathcal{Q}w \rangle_0 + \frac{1}{Re} \langle \rho^{-1} \Delta \mathcal{Q}w, \mathcal{Q}w \rangle_0.$$

Traitons chacun des termes de l'égalité précédente :

$$\langle \partial_t w, \mathcal{Q}w \rangle_0 = \langle \partial_t (\mathcal{P}w + \mathcal{Q}w), \mathcal{Q}w \rangle_0 = \langle \mathcal{P} \partial_t w, \mathcal{Q}w \rangle_0 + \langle \partial_t \mathcal{Q}w, \mathcal{Q}w \rangle_0 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathcal{Q}w\|_{0,\Omega}^2.$$

¹⁰ La décomposition de Leray est orthogonale.

On intègre ensuite par parties le second terme :

$$-\langle (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathcal{Q}w, \mathcal{Q}w \rangle_0 = \frac{-1}{2} \int_{\mathbb{T}^d} \mathbf{u} \cdot \nabla |\mathcal{Q}w|^2 dx = \int_{\mathbb{T}^d} \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}}{2} |\mathcal{Q}w|^2 dx \leq \frac{|\nabla \cdot \mathbf{u}|_\infty}{2} \|\mathcal{Q}w\|_{0,\Omega}^2.$$

On intègre également par parties le dernier terme de l'égalité :¹¹

$$\langle \rho^{-1} \Delta \mathcal{Q}w, \mathcal{Q}w \rangle_0 = - \int_{\mathbb{T}^d} \left(\frac{1}{\rho} |\nabla \mathcal{Q}w|_*^2 - \langle {}^t \nabla \mathcal{Q}w(\mathcal{Q}w), \nabla(\rho^{-1}) \rangle \right) dx. \quad (\text{Lem.2.17.vii})$$

L'inégalité de *Cauchy-Schwarz* pour le produit scalaire matriciel donne le résultat suivant :

$$\langle Ax, y \rangle = A :: (x {}^t y) \leq \frac{1}{2} \left(\alpha |A|_*^2 + \frac{1}{\alpha} \|x\|^2 \|y\|^2 \right).$$

pour tout réel $\alpha > 0$. En appliquant cette inégalité pour le dernier terme dans (Lem.2.17.vii), on obtient, avec $\nabla(\rho^{-1}) = -\rho^{-1} \nabla(\ln \rho)$ et pour tout $\alpha > 0$:

$$- \int_{\mathbb{T}^d} \langle {}^t \nabla \mathcal{Q}w(\mathcal{Q}w), \nabla(\rho^{-1}) \rangle dx \leq \frac{\rho_1}{2} \int_{\mathbb{T}^d} \left(\alpha |\nabla \mathcal{Q}w|_*^2 + \frac{1}{\alpha} |\mathcal{Q}w|^2 |\nabla(\ln \rho)|^2 \right) dx.$$

On obtient finalement l'estimation à partir des trois termes exprimés :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathcal{Q}w\|_{0,\Omega}^2 \leq \left(\frac{|\nabla \cdot \mathbf{u}|_\infty}{2} + \frac{\rho_1 |\nabla(\ln \rho)|_\infty^2}{2\alpha} \right) \|\mathcal{Q}w\|_{0,\Omega}^2 + \frac{\rho_1}{2} (\alpha - 2) \|\nabla \mathcal{Q}w\|_{0,\Omega}^2.$$

Ainsi, pour $\alpha = 2$, sachant que $\mathcal{Q}w_0 = 0$, on obtient $\mathcal{Q}w = 0$ après application de l'inégalité de *Grönwall*. Ainsi, w satisfait (2.14b). On en déduit de plus que $\mathcal{P}w = w$ et l'équation (2.15b) peut se récrire grâce aux égalités (Lem.2.17.iv) :

$$\nabla \cdot \left((\mathbf{u} \cdot \nabla) w - \frac{1}{\rho Re} \Delta w + \frac{1}{\rho} (\nabla \pi + f) \right) = 0,$$

ce qui implique que l'image de la parenthèse par \mathcal{Q} est nulle. Combiné à l'équation (Lem.2.17.v), ce résultat permet de retrouver (2.14a). ■

Le second lemme concerne des estimations de Sobolev pour le projecteur de Leray sur l'espaces des gradients :

Lemme 2.18 (Lemme A.1, [36])

Si w et \mathbf{u} sont dans $\mathcal{H}^s(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}^n)$ avec $s \geq s_0 + 1$, alors $\mathcal{Q}((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathcal{P}w) \in \mathcal{H}^s(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}^n)$ et :

$$\|\mathcal{Q}((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathcal{P}w)\|_s \leq C_{Q,1} \|\mathbf{u}\|_s \|\mathcal{P}w\|_s.$$

De même, pour $a \in \mathcal{H}^{s-1}(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$ et $w \in \mathcal{H}^s(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}^n)$ avec $s \geq s_0 + 2$, alors $\mathcal{Q}(a \Delta \mathcal{P}w) \in \mathcal{H}^{s-1}(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}^n)$ et :

$$\|\mathcal{Q}(a \Delta \mathcal{P}w)\|_{s-1} \leq C_{Q,2} \|\nabla a\|_{s-2} \|\mathcal{P}w\|_s.$$

Démonstration : La preuve repose sur les résultats de régularité elliptique (cf. lemme 2.15).

En effet, en posant $\nabla \phi_1 = \mathcal{Q}((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathcal{P}w)$ et $\nabla \phi_2 = \mathcal{Q}(a \Delta \mathcal{P}w)$, on a d'après les égalités (Lem.2.17.iv), sachant que $\nabla \cdot \mathcal{Q} \star = \nabla \cdot \star : \Delta \phi_1 = {}^t \nabla \mathbf{u} :: \nabla \mathcal{P}w$ et $\Delta \phi_2 = \nabla a \cdot \Delta \mathcal{P}w$. On applique ensuite l'inégalité de type *Moser* (2.1) pour majorer les seconds membres. On a $C_{Q,1} = C_{ell}(s-1, d) C_M(s-1, d)$ et $C_{Q,2} = C_{ell}(s-2, d) C_M(s-2, d)$. ■

¹¹ $\nabla \mathcal{Q}w$ est la jacobienne de $\mathcal{Q}w$ et $|A|_*^2 = \text{Tr}({}^t AA) = A :: A$ désigne la norme matricielle usuelle sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On revient maintenant à la **proposition 2.3**.

Démonstration : On applique ici la méthode des approximations successives, à savoir, partant d'un état $\mathbf{w}^{(0)} = \mathbf{w}_0$ et $\nabla\pi^{(0)} = 0$, on construit $(\mathbf{w}^{(k+1)}, \nabla\pi^{(k+1)})$ en résolvant le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{w}^{(k+1)}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w}^{(k+1)} - \frac{1}{\rho Re} \Delta \mathbf{w}^{(k+1)} = J^{(k)}, \\ \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla \pi^{(k+1)} \right) = - {}^t \nabla \mathbf{u} :: \nabla \mathcal{P} \mathbf{w}^{(k)} - \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \mathbf{f} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \right) \cdot \frac{\Delta \mathcal{P} \mathbf{w}^{(k)}}{Re}, \\ \mathbf{w}^{(k+1)}(0, \cdot) = \mathbf{w}_0, \end{cases} \quad (\text{Prop.2.3.i})$$

où :

$$J^{(k)} = -\mathcal{P} \left(\frac{1}{\rho} (\nabla \pi^{(k+1)} + \mathbf{f}) \right) + \mathcal{Q}((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathcal{P} \mathbf{w}^{(k)}) - \mathcal{Q} \left(\frac{1}{\rho Re} \Delta \mathcal{P} \mathbf{w}^{(k)} \right).$$

On vérifie tout d'abord que le second membre de l'équation elliptique dans (Prop.2.3.i) appartient à $\mathcal{X}_{s-3, \mathcal{I}}(\mathbb{T}^d)$. En effet, par le **corollaire 2.3**, $\frac{1}{\rho} \mathbf{f} \in \mathcal{X}_{s-2, \mathcal{I}}(\mathbb{T}^d)$, puis, par le **corollaire 2.2**, $\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \mathbf{f} \right) \in \mathcal{X}_{s-3, \mathcal{I}}(\mathbb{T}^d)$. On procède de même pour les autres termes. On applique ensuite le **lemme 2.16** pour obtenir l'existence de $\nabla\pi^{(k+1)}$ dans $\mathcal{X}_{s-2, \mathcal{I}}(\mathbb{T}^d)$.

On peut ensuite montrer que $J^{(k)} \in \mathcal{X}_{s-2, \mathcal{I}}(\mathbb{T}^d)$, en utilisant les **corollaires 2.2 et 2.3** ainsi que le **lemme 2.18**. Toutes les hypothèses du **lemme 2.13** sont ainsi vérifiées et on obtient l'existence de $\mathbf{w}^{(k+1)} \in \mathcal{X}_{s, \mathcal{I}}(\mathbb{T}^d)$. Le schéma itératif est donc bien défini.

On vérifie par ailleurs que $\mathbf{w}^{(k+1)} - \mathbf{w}^{(k)}$ et $\nabla\pi^{(k+1)} - \nabla\pi^{(k)}$ sont solutions du système :

$$\begin{cases} \frac{D}{Dt} (\mathbf{w}^{(k+1)} - \mathbf{w}^{(k)}) - \frac{1}{\rho Re} \Delta (\mathbf{w}^{(k+1)} - \mathbf{w}^{(k)}) = J^{(k)} - J^{(k-1)}, \\ \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla (\pi^{(k+1)} - \pi^{(k)}) \right) = - {}^t \nabla \mathbf{u} :: \nabla \mathcal{P} (\mathbf{w}^{(k)} - \mathbf{w}^{(k-1)}) \\ \quad + \frac{1}{Re} \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \right) \cdot \Delta \mathcal{P} (\mathbf{w}^{(k)} - \mathbf{w}^{(k-1)}), \\ (\mathbf{w}^{(k+1)} - \mathbf{w}^{(k)})(t=0, \cdot) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (\text{Prop.2.3.ii})$$

Des **lemmes 2.3 et 2.16**, on déduit les estimations¹² pour tout $t \in [0, \mathcal{I}]$ et $\sigma \in \{s-2, s-1\}$:

$$\begin{aligned} \left\| \nabla \pi^{(k+1)} - \nabla \pi^{(k)} \right\|_{\sigma} (t) &\leq C_{ell,2}(\sigma, d) \left(C_M^2 \|\rho\|_{s-2} \|\nabla \mathbf{u}\|_{s-2} \left\| \nabla \mathcal{P} (\mathbf{w}^{(k)} - \mathbf{w}^{(k-1)}) \right\|_{\sigma-1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{C_M}{Re} \|\nabla(\ln \rho)\|_{s-2} \left\| \Delta \mathcal{P} (\mathbf{w}^{(k)} - \mathbf{w}^{(k-1)}) \right\|_{\sigma-1} \right) \\ &\leq C_{nsi,1}(s, d, Re) \left[\|\rho\|_{s-1, \mathcal{I}} \|\mathbf{u}\|_{s-1, \mathcal{I}} + \|\ln \rho\|_{s-1, \mathcal{I}} \right] \left\| \mathbf{w}^{(k)} - \mathbf{w}^{(k-1)} \right\|_s (t). \end{aligned} \quad (\text{Prop.2.3.iii})$$

On en déduit la majoration :

$$\left\| \nabla \pi^{(k+1)} - \nabla \pi^{(k)} \right\|_{s-2, \mathcal{I}} \leq C_{nsi,2}(s, d, Re, \rho, \mathbf{u}) \left\| \mathbf{w}^{(k)} - \mathbf{w}^{(k-1)} \right\|_{s, \mathcal{I}}. \quad (\text{Prop.2.3.iv})$$

¹² Les indices des normes ne sont pas optimaux. $s-2$ suffirait pour chaque norme dans (Prop.2.3.iii), mais on choisit ici de faire apparaître la régularité exacte de chaque variable, en tenant compte des injections continues $\mathcal{H}^s \subset \mathcal{H}^{s-1} \subset \mathcal{H}^{s-2}$.

On applique ensuite l'inégalité d'énergie pour les solutions d'équation d'advection-diffusion (**lemme 2.13**) à $\mathbf{w}^{(k+1)} - \mathbf{w}^{(k)}$ solution de (**Prop.2.3.ii**) :

$$\forall t \in [0, \mathcal{T}], \quad \left\| \mathbf{w}^{(k+1)} - \mathbf{w}^{(k)} \right\|_s^2(t) \leq C_{adv-d,0}(s,d) e^{\hat{\xi}_s(t)} \int_0^t \left\| J^{(k)} - J^{(k-1)} \right\|_{s-1}^2(\tau) d\tau.$$

Or, en utilisant le **lemme 2.18**, on a la majoration :

$$\begin{aligned} \int_0^t \left\| J^{(k)} - J^{(k-1)} \right\|_{s-1}^2(\tau) d\tau &\leq 3C_M^2 \left\| \rho^{-1} \right\|_{s-1, \mathcal{T}}^2 \int_0^t \left\| \nabla \pi^{(k+1)} - \nabla \pi^{(k)} \right\|_{s-1}^2(\tau) d\tau \\ &+ 3 \left(C_{Q,1}^2 \|\mathbf{u}\|_{s-1, \mathcal{T}}^2 + \frac{C_{Q,2}^2}{Re^2} \left\| \rho^{-1} \right\|_{s-1, \mathcal{T}}^2 \right) \int_0^t \left\| \mathbf{w}^{(k)} - \mathbf{w}^{(k-1)} \right\|_s^2(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

En utilisant la majoration (**Prop.2.3.iii**) dans les deux inégalités précédentes, on aboutit à la récurrence :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, \mathcal{T}], \quad \left\| \mathbf{w}^{(k+1)} - \mathbf{w}^{(k)} \right\|_s^2(t) &\leq C_{nsi,3} \int_0^t \left\| \mathbf{w}^{(k)} - \mathbf{w}^{(k-1)} \right\|_s^2(\tau) d\tau \\ &\leq C_{nsi,3} t \left\| \mathbf{w}^{(k)} - \mathbf{w}^{(k-1)} \right\|_{s, \mathcal{T}}^2. \end{aligned}$$

Or, l'estimation d'énergie fournit également la majoration pour tout $t \in [0, \mathcal{T}]$:

$$\begin{aligned} \int_0^t \left\| \nabla \mathbf{w}^{(k+1)} - \nabla \mathbf{w}^{(k)} \right\|_s^2(\tau) d\tau &\leq C_{adv-d,0} \int_0^t \left\| J^{(k)} - J^{(k-1)} \right\|_{s-1}^2(\tau) d\tau \\ &\leq C_{nsi,4} t \left\| \mathbf{w}^{(k)} - \mathbf{w}^{(k-1)} \right\|_{s, \mathcal{T}}^2, \end{aligned}$$

par le même raisonnement que précédemment. Finalement, en sommant et en itérant, on obtient :

$$\left\| \mathbf{w}^{(k+1)} - \mathbf{w}^{(k)} \right\|_{s, \mathcal{T}}^2 \leq 2 \frac{(C_{nsi,5} \mathcal{T})^k}{k!} \left\| \mathbf{w}^{(1)} - \mathbf{w}^{(0)} \right\|_{s, \mathcal{T}},$$

ce qui justifie la convergence de la série de terme général $\left\| \mathbf{w}^{(k+1)} - \mathbf{w}^{(k)} \right\|_{s, \mathcal{T}}$ puis la convergence de $\mathbf{w}^{(k)}$ dans $\mathcal{X}_{s, \mathcal{T}}(\mathbb{T}^d)$. De la même manière, ce dernier résultat couplé avec l'inégalité (**Prop.2.3.iv**) prouve la convergence de la suite $\nabla \pi^{(k)}$ dans $\mathcal{X}_{s-2, \mathcal{T}}(\mathbb{T}^d)$. Comme l'espace des champs de gradients est fermé, la limite est de la forme $\nabla \pi$. ■

2.6 COMBUSTION À BAS MACH

De nombreuses études ont été menées sur des systèmes d'équations aux dérivées partielles dans le but de prouver l'existence de solutions classiques. Une technique devenue classique consiste à linéariser le système afin de construire un système itératif (itérées de Picard) convergeant vers la solution du problème.

On rappelle dans cette partie les travaux de *Embid* qui ont largement inspiré la présente étude. *Majda* puis *Embid* ont étudié un système modélisant les phénomènes de combustion à bas nombre de Mach et à M espèces de type gaz parfaits [35, 36, 59]. Ce système présente des similitudes avec le système DLMN, tant mathématiques que physiques, ce qui justifie l'intérêt qui lui est porté. Ce paragraphe est à but informatif et ne contient aucun résultat nouveau, même si l'écriture est parfois différente par rapport aux travaux de *Embid*, afin de mettre en valeur les points communs avec le système DLMN.

2.6.1 Modèle

Le système, de type Navier-Stokes compressible, utilisé pour la modélisation, s'écrit sous forme non conservative :

$$\begin{aligned}
 D_t p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} &= \frac{\gamma - 1}{2\lambda^2 Re \mu^2} \boldsymbol{\sigma} :: \boldsymbol{\sigma} + \frac{\gamma - 1}{Pr Re \Gamma - 1} \Gamma \Delta T \\
 &+ \rho \sum_{i=1}^{M-1} \frac{\gamma - 1}{Pr \cdot Re} \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} \frac{c_{P,i} - c_{P,M}}{Le^i} \nabla T \cdot \nabla Y_i \\
 &+ \sum_{i=1}^{M-1} \frac{\gamma T}{Pr \cdot Re \cdot Le^i} \left(\frac{1}{W_i} - \frac{1}{W_M} \right) \nabla \cdot (\rho \nabla Y_i) \\
 &+ \sum_{i=1}^{M-1} \left[\gamma T \left(\frac{1}{W_i} - \frac{1}{W_M} \right) - (\gamma - 1) \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} (h_i - h_M) \right] \Phi_i, \\
 \rho D_t \mathbf{u} + \lambda^2 \nabla p &= \frac{1}{\mu Re} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \\
 \rho c_p D_t T &= \frac{\Gamma - 1}{2\lambda^2 Re \Gamma} \boldsymbol{\sigma} :: \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{Pr \cdot Re} \Delta T + \rho \sum_{i=1}^{M-1} \frac{c_{P,i} - c_{P,M}}{Pr \cdot Re \cdot Le^i} \nabla T \cdot \nabla Y_i \\
 &+ \frac{\Gamma - 1}{\Gamma} D_t p - \sum_{i=1}^{M-1} (h_i - h_M) \Phi_i, \\
 \rho D_t Y_i &= \frac{1}{Pr Re Le^i} \nabla \cdot (\rho \nabla Y_i) + \Phi_i,
 \end{aligned}$$

où les variables classiques p , \mathbf{u} , T , ρ , de pression, vitesse, température et densité sont adimensionnées, et l'opérateur D_t désigne l'opérateur agrangien usuel $\partial_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)$. Les constantes classiques qui apparaissent dans le système sont le nombre de Reynolds Re (rapport entre forces d'inertie et forces visqueuses), le nombre de Prandtl Pr (rapport entre diffusivités cinématique et thermique) et le nombre de Lewis Le (rapport entre diffusivités massique et thermique). On retrouve également les variables thermodynamiques γ , Γ , c_p comme dans le système DLMN, ainsi que la masse moléculaire W_i . $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur de contraintes de Cauchy, μ étant le coefficient de viscosité **supposé constant** dans tout le mélange. Enfin, Y_i , h_i et Φ_i désignent respectivement la fraction massique de l'espèce i , l'enthalpie et le terme source de réaction chimique. **L'espèce M est supposée largement majoritaire dans le mélange.** On simplifie alors le système au moyen d'un développement asymptotique par rapport au paramètre :

$$\lambda = \frac{1}{\mathcal{M}\sqrt{\Gamma}}, \text{ où } \mathcal{M} \text{ est le nombre de Mach.}$$

Pour alléger les notations, on réécrit le système précédent sous la forme :¹³

$$\begin{cases} D_t p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\alpha^\sigma}{\lambda^2} \sigma :: \sigma + \mathcal{G}(p, T, Y), \\ \rho D_t \mathbf{u} + \lambda^2 \nabla p = \frac{1}{\mu Re} \nabla \cdot \sigma, \\ \rho \alpha^{c_p} D_t T = \frac{\alpha^\sigma}{\lambda^2} \sigma :: \sigma + \alpha^T \Delta T + \rho \alpha^T \sum_{i=1}^{M-1} \kappa_i \nabla T \cdot \nabla Y_i + (\gamma - 1) D_t p + \sum_{i=1}^{M-1} \eta_i \Phi_i, \\ \rho D_t Y_i = \alpha_i^Y \nabla \cdot (\rho \nabla Y_i) + \Phi_i, \end{cases} \quad (2.16)$$

avec :

$$\mathcal{G}(p, T, Y) = \alpha^T \Delta T + \rho \alpha^T \sum_{i=1}^{M-1} \kappa_i \nabla T \cdot \nabla Y_i + T \sum_{i=1}^{M-1} \alpha_i^Y \alpha_i^\Phi \nabla \cdot (\rho \nabla Y_i) + \sum_{i=1}^{M-1} [T \alpha_i^\Phi + \eta_i] \Phi_i,$$

et :

$$\begin{aligned} \alpha^\sigma(Y) &= \frac{\gamma(Y) - 1}{2Re \mu^2}, & \alpha^T(Y) &= \frac{\gamma(Y) - 1}{\Gamma - 1} \frac{\Gamma}{Pr Re}, & \alpha_i^Y &= \frac{1}{Pr Re Le^i}, \\ \alpha_i^\Phi(Y) &= \gamma(Y) \left(\frac{1}{W_i} - \frac{1}{W_M} \right), & \alpha^{c_p}(Y) &= c_p(Y) \frac{\gamma(Y) - 1}{\Gamma - 1} \Gamma, & \kappa_i &= \frac{c_{P,i} - c_{P,M}}{Le^i}, \\ \eta_i(T, Y) &= -\frac{\gamma(Y) - 1}{\Gamma - 1} \Gamma (h_i - h_M). \end{aligned}$$

On effectue un développement asymptotique par rapport au paramètre $\lambda \gg 1$ (du fait que le nombre de Mach est supposé très faible). On obtient tout d'abord le fait que le champ de pression (à l'ordre 0) est homogène en espace, ce qui est classique dans les approches bas Mach. On obtient donc, à partir du système (2.16), une EDO pour la pression :

$$p'(t) = \mathcal{H}(t) := \frac{\int_{\Omega} \gamma^{-1}(t, \mathbf{x}) \mathcal{G}(p, T, Y)(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x}}{\int_{\Omega} \gamma^{-1}(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x}}, \quad (2.17a)$$

une équation de réaction - diffusion pour la température :

$$\begin{cases} \rho \alpha^{c_p} D_t T - \alpha^T \Delta T \stackrel{\Omega}{=} \rho \alpha^T \sum_{i=1}^{M-1} \kappa_i \nabla T \cdot \nabla Y_i + (\gamma - 1) \mathcal{H}(t) + \sum_{i=1}^{M-1} \eta_i \Phi_i, \\ \nabla T \cdot \mathbf{v} \stackrel{\partial\Omega}{=} 0, \end{cases} \quad (2.17b)$$

ainsi que pour les fractions massiques :

$$\begin{cases} \rho D_t Y_i - \alpha_i^Y \rho \Delta Y_i \stackrel{\Omega}{=} \alpha_i^Y \nabla \rho \cdot \nabla Y_i + \Phi_i, \\ \nabla Y_i \cdot \mathbf{v} \stackrel{\partial\Omega}{=} 0, \end{cases} \quad (2.17c)$$

¹³ $Y = (Y_1, \dots, Y_{M-1})$.

une équation elliptique pour la partie potentielle du champ de vitesse (en utilisant la décomposition de Leray $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \nabla\phi$) :

$$\begin{cases} \Delta\phi \stackrel{\Omega}{=} \frac{1}{\gamma p} [\mathcal{G}(p, T, Y) - \mathcal{H}(t)] , \\ \nabla\phi \cdot \mathbf{v} \stackrel{\partial\Omega}{=} 0 , \end{cases} \quad (2.17d)$$

et enfin un système de type Navier-Stokes incompressible pour la partie solénoïdale :

$$\begin{cases} \rho D_t \mathbf{w} - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{w} \stackrel{\Omega}{=} -\nabla\pi - \rho D_t \nabla\phi , \\ \nabla \cdot \mathbf{w} \stackrel{\Omega}{=} 0 , \\ \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \stackrel{\partial\Omega}{=} 0 , \\ \mathbf{w} \wedge \mathbf{v} \stackrel{\partial\Omega}{=} -\nabla\phi \wedge \mathbf{v} . \end{cases} \quad (2.17e)$$

En se plaçant dans le cas des gaz parfaits, les variables ρ , h_i et c_p sont déterminées par les relations :

$$\rho = \frac{p}{T} \left[\sum_{i=1}^M \frac{Y_i}{W_i} \right]^{-1} , \quad (2.18a)$$

$$h_i = c_{p,i} T + h_i^0 , \quad c_p = \sum_{i=1}^M Y_i c_{p,i} , \quad c_V = \sum_{i=1}^M Y_i c_{V,i} , \quad (2.18b)$$

où, pour chaque fluide i , les capacités calorifiques sont données par :

$$c_{p,i} = \frac{R}{W_i} \frac{\gamma_i}{\gamma_i - 1} \frac{\Gamma - 1}{\Gamma} \quad \text{et} \quad c_{V,i} = \frac{R}{W_i} \frac{1}{\gamma_i - 1} \frac{\Gamma - 1}{\Gamma} . \quad (2.18c)$$

On peut alors déterminer la loi d'évolution de $\gamma = \frac{c_p}{c_V} > 1$ car $\gamma_i > 1$.

Les relations (2.18) ne sont pas utilisées dans la suite en tant que telles, mais permettent de justifier que ρ , c_p et γ ont la même régularité que T , p et Y_i , tant que p et T sont strictement positives.

Le système (2.17) est complété par les conditions initiales suivantes. La pression est initialement constante dans le domaine Ω :

$$p(0) \equiv p_0 . \quad (2.19a)$$

On se donne également des états initiaux pour la température et les fractions massiques :

$$T(0, \mathbf{x}) = T_0(\mathbf{x}) , \quad (2.19b)$$

$$Y_i(0, \mathbf{x}) = Y_{i,0}(\mathbf{x}) . \quad (2.19c)$$

De même, la vitesse initiale se décompose sous la forme :

$$\mathbf{u}(0, \mathbf{x}) \stackrel{\Omega}{=} \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_0(\mathbf{x}) + \nabla \phi_0(\mathbf{x}), \quad (2.19d)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{w}_0 \stackrel{\Omega}{=} 0, \quad \mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{v} \stackrel{\partial\Omega}{=} 0, \quad (2.19e)$$

$$\Delta \phi_0 \stackrel{\Omega}{=} \frac{1}{\gamma(Y_{i,0})p_0} [\mathcal{G}(p_0, T_0, Y_0) - \mathcal{H}(p_0, T_0, Y_0)], \quad \nabla \phi_0 \cdot \mathbf{v} \stackrel{\partial\Omega}{=} 0, \quad (2.19f)$$

$$\mathbf{w}_0 \wedge \mathbf{v} \stackrel{\partial\Omega}{=} -\nabla \phi_0 \wedge \mathbf{v}. \quad (2.19g)$$

On introduit enfin la notation vectorielle $\boldsymbol{\theta} = (p, T, Y_1, \dots, Y_{M-1})$ ainsi que le domaine des contraintes Θ portant sur ce vecteur :

$$\Theta = \left\{ \boldsymbol{\theta} = (p, T, Y_1, \dots, Y_{M-1}) \in \mathbb{R}^{M+1} : p > 0, T > 0, Y_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{M-1} Y_i < 1 \right\}.$$

Un cas simplifié

Le premier cas traité est celui des fluides non visqueux, pour lesquels $\mu = 0$, $\alpha^T = 0$ et $\alpha_i^Y = 0$ (ce qui correspond par exemple à un cas $Re \rightarrow +\infty$ à Pr constant). Cela permet de négliger tous les termes différentiels d'ordre 2 (ΔT , ΔY_i et $\Delta \mathbf{w}$) dans les équations d'advection-diffusion (qui deviennent alors de simples équations d'advection) et donc d'éviter les termes de bord dans les intégrations par parties. Le système se résume alors à :

$$\left\{ \begin{array}{l} p'(t) = \mathcal{H}(t), \\ \rho c_p D_t T = \frac{\Gamma - 1}{\Gamma} \mathcal{H}(t) - \sum_i (h_i - h_M) \Phi_i, \\ \rho D_t Y_i = \Phi_i, \\ \rho D_t \mathbf{w} = -\nabla \pi - \rho D_t \nabla \phi, \\ \nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \\ \Delta \phi = \frac{\mathcal{G} - \mathcal{H}(t)}{\gamma p}, \end{array} \right. \quad (2.20)$$

avec :

$$\mathcal{G}(p, T, Y) = \sum_i \left[\gamma T \left(\frac{1}{W_i} - \frac{1}{W_M} \right) - \frac{\gamma - 1}{\Gamma - 1} \Gamma (h_i - h_M) \right] \Phi_i.$$

Embid démontre le résultat suivant, dans le cas d'un domaine Ω borné et régulier :

Théorème 2.3 ([35])

Soient, pour $s > \frac{d}{2} + 1$, $\boldsymbol{\theta}_0$ et \mathbf{u}_0 dans $\mathcal{H}^s(\Omega)$. On suppose que pour presque tout $\mathbf{x} \in \Omega$, $\boldsymbol{\theta}_0(\mathbf{x}) \in \overline{G_0}$ avec $\overline{G_0}$ compact dans Θ , et que $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{H}^s(\Omega)$ vérifie les conditions initiales (2.19). Alors, il existe $\mathcal{T} > 0$ tel que le système (2.20) admette une unique solution régulière $(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}, \nabla \pi)$ avec :

- $\boldsymbol{\theta}$ et \mathbf{v} dans $\mathcal{C}^1([0, \mathcal{T}], L^2(\Omega)) \cap L^\infty([0, \mathcal{T}], \mathcal{H}^s(\Omega)) \cap Lip([0, \mathcal{T}], \mathcal{H}^{s-1}(\Omega))$;
- $\nabla \pi$ dans $\mathcal{C}^0([0, \mathcal{T}], L^2(\Omega)) \cap L^\infty([0, \mathcal{T}], \mathcal{H}^s(\Omega))$.

De plus, pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$ et tout $t \in [0, \mathcal{T}]$, $\boldsymbol{\theta}(t, \mathbf{x}) \in \overline{G_0} \cap \Theta$.

Ce cas purement théorique permet de travailler dans un domaine Ω quelconque, avec une régularité équivalente pour θ et u . Il sert de préliminaires à l'étude du système complet. L'indice s est ici entier, même si cela n'est pas dit explicitement. La preuve utilise des conditions de signe sur Φ_i en fonction de Y_i . Le résultat repose sur les différents lemmes et propositions énoncés dans les paragraphes précédents pour l'équation d'advection.

2.6.2 Théorème d'existence et d'unicité pour le modèle de combustion

On considère cette fois-ci le modèle complet (2.17). Dans le but encore une fois d'éviter tout terme de bord dans les estimations d'énergie (cf. **lemme 2.13**), on se place dans le cadre des conditions aux limites périodiques en prenant $\Omega = \mathbb{T}^d$. Le résultat est le suivant :

Théorème 2.4 (Théorème 2.1, [36])

Soient, pour $s > s_0 + 1$, $\theta_0 \in \mathcal{H}^{s+1}(\mathbb{T}^d)$ tel que pour presque tout $x \in \mathbb{T}^d$, $\theta_0(x) \in G_0$ avec $\overline{G_0}$ compact dans Θ , et $u_0 \in \mathcal{H}^s(\mathbb{T}^d)$ vérifiant les conditions initiales (2.19). Alors, il existe un ouvert borné G_1 tel que $\overline{G_0} \subset G_1$ et $\mathcal{T} = \mathcal{T}(s, G_1, \|\theta_0\|_s, \|u_0\|_s) > 0$ tels que le problème (2.17) admette une unique solution régulière $(\theta, u, \nabla \pi)$ avec :

- $\theta \in \mathcal{X}_{s+1, \mathcal{T}}(\mathbb{T}^d)$ et $\frac{\partial \theta}{\partial t} \in \mathcal{X}_{s-1, \mathcal{T}}(\mathbb{T}^d)$;
- $u \in \mathcal{X}_{s, \mathcal{T}}(\mathbb{T}^d)$ et $\frac{\partial u}{\partial t} \in \mathcal{X}_{s-2, \mathcal{T}}(\mathbb{T}^d)$;
- $\nabla \pi \in \mathcal{X}_{s-2, \mathcal{T}}(\mathbb{T}^d)$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{T}^d$ et tout $t \in [0, T]$, $\theta(t, x) \in \overline{G_1} \cap G$.

La preuve utilise cette fois-ci les résultats sur les équations d'advection-diffusion, appliqués au système itératif constitué des conditions initiales :

$$\theta^{k=0}(t, x) = \theta_0(x), \quad (2.21a)$$

$$u^{k=0}(t, x) = u_0(x). \quad (2.21b)$$

puis, des équations sur θ^{k+1} :

$$\begin{cases} \frac{dp^{k+1}}{dt} = \mathcal{H}^k(t) := \frac{\int_{\mathbb{T}^d} \gamma^{-1}(Y^k) \mathcal{G}(\theta^k) dx}{\int_{\mathbb{T}^d} \gamma^{-1}(Y^k) dx}, \\ p^{k+1}(0) = p_0, \end{cases} \quad (2.21c)$$

$$\begin{cases} (\rho \alpha^{cp})(\theta^k) D_t^k T^{k+1} - \alpha^T(\theta^k) \Delta T^{k+1} \\ = \rho \alpha^T(\theta^k) \sum_{i=1}^{M-1} \kappa_i \nabla T^k \cdot \nabla Y_i^k + (\gamma - 1) \mathcal{H}^k(t) + \sum_{i=1}^{M-1} \eta_i(\theta^k) \Phi_i(\theta^k), \\ T^{k+1}(0, x) = T_0(x), \end{cases} \quad (2.21d)$$

$$\begin{cases} \rho(\theta^k) D_t^k Y_i^{k+1} - \alpha_i^Y \rho(\theta^k) \Delta Y_i^{k+1} = \alpha_i^Y \nabla \rho(\theta^k) \cdot \nabla Y_i^k + \Phi_i(\theta^k), \\ Y_i^{k+1}(0, x) = Y_{i,0}(x), \end{cases} \quad (2.21e)$$

et enfin sur $\nabla\phi^{k+1}$:

$$\begin{cases} \Delta\phi^{k+1} = \frac{1}{\gamma(Y^{k+1})p^{k+1}} [\mathcal{G}(\boldsymbol{\theta}^{k+1}) - \mathcal{H}^{k+1}(t)] , \\ \Delta\phi^{k+1}(0, \mathbf{x}) = \frac{1}{\gamma(Y_{i,0})p_0} [\mathcal{G}(p_0, T_0, Y_0) - \mathcal{H}(p_0, T_0, Y_0)] , \end{cases} \quad (2.21f)$$

et sur \mathbf{w}^{k+1} :

$$\begin{cases} \rho(\boldsymbol{\theta}^k)D_t^k\mathbf{w}^{k+1} - \frac{1}{Re}\Delta\mathbf{w}^{k+1} = -\nabla\pi^{k+1} - \rho(\boldsymbol{\theta}^k)D_t^k\nabla\phi^{k+1} + \frac{1}{Re}\nabla\Delta\phi^{k+1} , \\ \nabla \cdot \mathbf{w}^{k+1} = 0 , \\ \mathbf{w}^{k+1}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{w}_0(\mathbf{x}) . \end{cases} \quad (2.21g)$$

Il est démontré dans un premier temps que les suites sont bornées dans des espaces $\mathcal{X}_{s,\mathcal{F}}(\mathbb{T}^d)$, avant de prouver qu'elles convergent fortement dans $\mathcal{X}_{0,\mathcal{F}}(\mathbb{T}^d)$. Un point-clé est de s'assurer que les fonctions T et p demeurent strictement positives et que Y_i est à valeurs dans $[0, 1]$, afin de garantir l'existence des coefficients thermodynamiques. Pour la température et la pression, comme T_0 et p_0 sont strictement positives et que T et p sont continues, il existe un intervalle $[0, \mathcal{T}_0]$ sur lequel ces deux variables conservent leur signe. Pour ce qui est de la positivité des fractions massiques Y_i (qui peuvent s'annuler et donc potentiellement devenir négatives), *Embid* utilise la théorie des domaines invariants (cf. §2.6.3).

Afin de donner un comportement identique aux $M + 1$ composantes de $\boldsymbol{\theta}$ (légitimant ainsi la notation), on récrit (*via* le **lemme 2.14** avec $\kappa = 1$ pour l'inconnue p) les équations (2.21c-d-e) sous la forme d'un système d'advection-diffusion :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \right) \boldsymbol{\theta}^{k+1} - \mathfrak{D}(\boldsymbol{\theta}^k)\Delta\boldsymbol{\theta}^{k+1} = \mathfrak{F}(\boldsymbol{\theta}^k) ,$$

où \mathfrak{D} est la matrice diagonale à coefficients strictement positifs :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \alpha^T(\rho\alpha^{cp})^{-1} & & & \\ & & \alpha_1^Y & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \alpha_{M-1}^Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & (Pr Re \rho c_p)^{-1}(\boldsymbol{\theta}) & & & \\ & & \alpha_1^Y & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \alpha_{M-1}^Y \end{pmatrix}$$

et \mathfrak{F} est le vecteur de \mathbb{R}^{M+1} de coordonnées :

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_1(\boldsymbol{\theta}) &= \mathcal{H}(t) , \\ \mathfrak{F}_2(\boldsymbol{\theta}) &= (\rho\alpha^{cp})^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \left(\rho\alpha^T(\boldsymbol{\theta}) \sum_{i=1}^{M-1} \kappa_i \nabla T \cdot \nabla Y_i + (\gamma - 1)\mathcal{H}(t) + \sum_{i=1}^{M-1} \eta_i(\boldsymbol{\theta})\Phi_i(\boldsymbol{\theta}) \right) , \\ \mathfrak{F}_{i+2}(\boldsymbol{\theta}) &= \rho^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \left(\alpha_i^Y \nabla \rho(\boldsymbol{\theta}) \cdot \nabla Y_i + \Phi_i(\boldsymbol{\theta}) \right) , \quad 1 \leq i \leq M-1 . \end{aligned}$$

2.6.3 Régions invariantes

Ce paragraphe reprend quelques notions introduites par Chueh, Conley & Smoller [16, 81] et utilisées par *Embid*. On considère deux ouverts \mathcal{U} et \mathcal{V} de \mathbb{R}^m et \mathbb{R}^n respectivement. On traite ici de propriétés des solutions de l'EDP :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \varepsilon D(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \Delta \mathbf{u} + \sum_{i=1}^m M^i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} + f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (2.22)$$

où \mathbf{u} et f sont des fonctions de $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{U}$ et $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ (resp.) dans \mathcal{V} . D et M^i sont des matrices carrées d'ordre n définies sur $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{U} \times \mathcal{V}$. ε est un réel positif. On suppose de plus que pour tous $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ et $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, les valeurs propres de la matrice $D(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ sont positives.

On introduit ensuite la notion de quasi-convexité.

Définition 2.6

$G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **quasi-convexe au point** $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ si, pour tout $\eta \in \mathbb{R}^n$ tel que $dG|_{\mathbf{v}}(\eta) = 0$, alors $d^2G|_{\mathbf{v}}(\eta, \eta) \geq 0$. Plus généralement, G est quasi-convexe sur \mathcal{V} si, pour tout $c \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : G(\mathbf{v}) \leq c\}$ est convexe.

Si G est suffisamment régulière, alors G est quasi-convexe sur \mathcal{V} ssi G est quasi-convexe en tout point de \mathcal{V} .

Par ailleurs, étant donnée une matrice symétrique définie positive S , on définit l'opérateur :

$$\Delta_S \mathbf{v}(\mathbf{x}_0) = \sum_{i,j} S_{ij}(\mathbf{x}_0) \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) = \sum_k \lambda_k(\mathbf{x}_0) d^2 \mathbf{v}|_{\mathbf{x}_0}(\tilde{\zeta}_k(\mathbf{x}_0), \tilde{\zeta}_k(\mathbf{x}_0)).$$

où $\lambda_k(\mathbf{x}_0)$ et $\tilde{\zeta}_k(\mathbf{x}_0)$ les valeurs et vecteurs propres de $S(\mathbf{x}_0)$.

Le lemme sur lequel repose la démonstration du résultat principal est le suivant :

Lemme 2.19

Soit $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ régulières à dérivées non nulles. Pour $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^n$, on note $\Sigma = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : G(\mathbf{v}) \leq G(\mathbf{v}_0)\}$. Soit D une matrice symétrique définie positive. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. G est quasi-convexe en \mathbf{v}_0 et ${}^t \nabla G(\mathbf{v}_0)$ est un vecteur propre à gauche de D .
2. Pour toute fonction $\mathbf{v} : \mathbb{R}^m \rightarrow \Sigma$ telle que $\mathbf{v}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{v}_0$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$dG|_{\mathbf{v}_0}(D \Delta_S \mathbf{v}(\mathbf{x}_0)) \leq 0.$$

On introduit ensuite la notion principale du paragraphe.

Définition 2.7

Un ensemble $B \subset \mathcal{V}$ est dit **positivement invariant** par (2.22) si toute solution \mathbf{u} de l'équation (2.22) munie de conditions initiales et aux limites dans B demeure dans B .

Le résultat utilisé dans les travaux sur la combustion est alors :

Théorème 2.5 ([81])

Soit D une matrice symétrique définie positive telle que toute solution de (2.22) dépende continûment du terme source f au sens de la topologie \mathcal{C}^1 . Pour G_i fonctions régulières sur \mathcal{V} , on pose $\Sigma = \bigcap_{i=1}^p \{v \in \mathcal{V} : G_i(v) \leq 0\}$. Alors Σ est une région invariante pour (2.22) si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites en tout point $v_0 \in \partial\Sigma$, i.e. pour lequel il existe un indice i tel que $G_i(v_0) = 0$:

1. ${}^t\nabla G_i(v_0)$ est un vecteur propre à gauche de $D(t, x, v_0)$ et de $M^j(t, x, v_0)$;
2. G_i est quasi-convexe en v_0 ;
3. $\nabla G_i(v_0) \cdot f(t, x, v_0) \leq 0$.

Application au modèle de combustion

On cherche à montrer ici que les fractions massiques Y_i intervenant dans le modèle de combustion (2.17) restent positives. Contrairement à T et p , ces variables peuvent en effet s'annuler sur \mathbb{T}^d à l'instant initial. Les considérations précédentes aident à prouver que les Y_i ne prennent pas de valeurs négatives.

On reformule l'équation (2.17c) comme suit :

$$\frac{\partial Y_i}{\partial t} = \alpha_i \Delta Y_i + [\alpha_i \nabla(\ln \rho) - \mathbf{u}] \cdot \nabla Y_i + \rho^{-1} \Phi_i,$$

soit encore, sous forme vectorielle :

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = D \Delta Y + \sum_j M^j \frac{\partial Y}{\partial x_j} + \rho^{-1} \Phi, \quad (2.23)$$

où D et M^j sont les matrices diagonales de coefficients :

$$D_{ii} = \alpha_i \quad \text{et} \quad M_{ii}^j = \alpha_i \partial_j(\ln \rho) - u_j.$$

On note alors :

$$B = \bigcap_{i=1}^{M-1} \left\{ Y \in \mathbb{R}^{M-1} : g_i(Y) \leq 0 \right\},$$

avec $g_i : \mathbb{R}^{M-1} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto -x_i$. On vérifie les conditions d'application du **théorème 2.5**. En effet, comme $\nabla g_i = -\mathbf{e}_i$, on a trivialement :

$$\begin{aligned} {}^t\nabla g_i|_{Y_i=0} D &= D_{ii} {}^t\nabla g_i|_{Y_i=0}, \\ {}^t\nabla g_i|_{Y_i=0} M^j &= M_{ii}^j {}^t\nabla g_i|_{Y_i=0}, \\ \forall \zeta \in \mathbb{R}^n, \text{ Hess}(g_i)\zeta \cdot \zeta &\geq 0, \text{ car Hess}(g_i) = 0. \end{aligned}$$

Concernant la dernière hypothèse du théorème, elle est garantie par des considérations physiques qui justifient le signe des composantes Φ_i . D'où, B est une région invariante pour l'équation (2.23).

2.7 BILAN

Remarques diverses sur les résultats d'*Embid*

L'intégralité des lemmes a été reprise dans ce document (§2.3) avec une démonstration réécrite rigoureusement, en explicitant les constantes et en améliorant la clarté de certains calculs. De plus :

- Il est à souligner que tous les résultats sur les équations d'advection-diffusion sont démontrés pour des conditions aux limites périodiques. Il serait intéressant dans l'avenir d'étudier l'extension à un domaine borné suffisamment régulier. La principale difficulté est le traitement des termes de bord qui nécessiteront des inégalités de trace adéquates.
- Les lemmes 3.5 et 3.6 présentés dans [35] par *Embid* sont regroupés ici dans le **lemme 2.13** et donnés sous une forme légèrement différente. On modifie les hypothèses sur le coefficient a en imposant une régularité plus faible. Un degré de liberté est ajouté sur l'exposant intervenant dans les estimations d'énergie (à savoir que l'on peut majorer l'exposant bien que les inégalités ne soient *a priori* pas croissantes par rapport à cet exposant). De plus, il est nécessaire pour la démonstration d'avoir $s \geq s_0 + 2$ au lieu de $s > \frac{d}{2} + 1$ pour avoir les inclusions de Sobolev requises.
- On a ajouté une étude minutieuse des propriétés des espaces $\mathcal{X}_{s,\mathcal{F}}(\mathbb{T}^d)$, fondamentale pour la justification de tous les calculs de régularité dans les preuves des lemmes.
- En ce qui concerne la masse volumique, la loi des gaz parfaits n'est pas utilisée en tant que telle, mais permet de justifier d'une part que ρ est strictement positive (puisque le triplet de variables de base $\theta = (Y, T, P)$ est supposé l'être), et d'autre part qu'elle possède la même régularité que θ . Ces deux propriétés permettent de satisfaire les hypothèses des lemmes évoqués ci-dessus. On peut alors envisager de prendre une loi d'état quelconque à partir du moment où elle fournit une dépendance de ρ (par rapport à θ) lui garantissant la même régularité et le même signe.

En résumé, les travaux de thèse de *Embid* constituent une étude mathématique remarquable des équations de la combustion à bas Mach, comprenant de nombreux outils d'analyse qui vont être appliqués dans le chapitre 5. Elle contient parfois quelques limites et quelques approximations, que nous avons souhaité mettre en lumière dans ces notes. Nous avons également adapté certains résultats du fait des spécificités du modèle DLMN, en particulier les régularités différentes des composantes du triplet (Y_1, T, P) ou encore la combinaison d'équations d'advection et d'advection-diffusion.

Boîte à outils

Plusieurs lemmes d'analyse fonctionnelle ont été (re)démontrés ou simplement rappelés, dans la perspective de les utiliser dans la preuve d'existence (et d'unicité) d'une solution forte au système DLMN. Ces outils sont en effet largement dédiés à l'étude de solutions d'EDPs appartenant à des espaces de Sobolev. Cependant, certains arguments restent valables dans le cadre de solutions faibles, comme on le verra dans l'étude 1D du modèle ABV.

Deuxième partie

**Modèle Abstrait de Vibration de
Bulles**

ETUDE THÉORIQUE DU MODÈLE

3

SOMMAIRE

3.1	ÉTUDE QUALITATIVE DU MODÈLE ABV	75
3.1.1	Restrictions sur le potentiel	75
3.1.2	Donnée initiale	76
3.1.3	Résultat d'existence et d'unicité en temps fini	76
3.1.4	Réflexions sur le temps d'existence	82
3.1.5	Invariances par homothéties et translations	87
3.1.6	Autres propriétés pour des données moins régulières	88
3.1.7	Moyenne des solutions bornées	91
3.2	MODÈLE ABSTRAIT DE VIBRATION DE BULLE EN DIMENSION 1	99
3.2.1	Reformulations du modèle	100
3.2.2	Évolution d'une bulle dans un domaine borné	100
3.2.3	Approximations de solutions discontinues	104
3.3	EXTENSION AU CAS RADIAL EN 2D ET 3D	117
3.4	CONCLUSION	121

S EN GUISE de travaux préliminaires à l'étude du système DLMN (que l'on a construit pour simuler des écoulements diphasiques à bas nombre de Mach), on s'intéresse au modèle *Abstrait de Vibration de Bulles* (noté ABV), dont la structure mathématique se rapproche de celle du modèle précédent. On rappelle sa formulation :

$$(3.1) \quad \begin{cases} \partial_t Y + \nabla \phi \cdot \nabla Y = 0, & (3.1a) \\ Y(0, \cdot) = Y_0, & (3.1b) \\ \Delta \phi(t, \mathbf{x}) = \psi(t) \left(Y(t, \mathbf{x}) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y(t, \mathbf{x}') \, d\mathbf{x}' \right), & (3.1c) \\ \nabla \phi \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0. & (3.1d) \end{cases}$$

Les données sont ici le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \in \{1, 2, 3\}$), supposé **borné et lipschitzien**, de normale extérieure ν , la pulsation $\psi \in \mathcal{C}^0(0, +\infty)$ et la donnée initiale Y_0 , dont la régularité influe sur le choix des méthodes théoriques et numériques mises en œuvre dans l'étude. Le cadre physique étant la modélisation des bulles, la fonction Y est supposée représenter la fraction massique de la phase gazeuse. Plus précisément, d'un point de vue

mathématique, Y est la fonction caractéristique d'un sous-domaine, lequel correspond à l'espace occupé par cette phase. Toutefois, le système sous sa forme (3.1) n'est pas adapté au concept de solutions faibles (en particulier du fait de la présence du produit $\nabla\phi \cdot \nabla Y$). On verra dans la suite comment reformuler le problème afin de pouvoir traiter ce type de solutions. C'est pourquoi on suppose, dans un premier temps, que la donnée Y_0 est plus régulière (qu'une fonction caractéristique), ce qui se traduit par plus de régularité sur la solution. On se place ici dans des espaces de Sobolev, pour lesquels on dispose de résultats d'analyse fonctionnelle. Cela permet également de pouvoir définir le terme de produit. Une fois l'analyse du cas régulier effectuée, il convient ensuite d'établir le lien entre solutions régulières et irrégulières, par exemple par des processus de passage à la limite.

On rappelle que ce modèle est non-physique dans la mesure où il résulte d'une simplification mathématique (changement pur et simple du second membre de l'équation sur le potentiel). On verra cependant dans la suite que les résultats numériques obtenus (cf. Ch. 4) présentent des caractéristiques intéressantes et mettent en valeur notamment le rôle de ψ .

On trouve dans la littérature (en physique ou en biologie par exemple) des systèmes simplifiés de structures semblables. À titre d'exemple, on peut citer le modèle d'instabilité de Kull-Anisimov, que l'on trouve dans des études de front d'ablation en confinement inertiel (e.g. Helffer et Lafitte [48]), dans l'étude des nuages de plasma de Zalesak [90, § VIII] :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho = 0, \\ \nabla \cdot (\rho \nabla \Psi) = \mathbf{E} \cdot \nabla \rho, \\ \mathbf{V} \propto \nabla \Psi \wedge \mathbf{B}, \end{cases}$$

(ρ étant la densité d'électrons et Ψ le potentiel de perturbation électrique) ou encore dans certains modèles de chimiotaxie, comme celui présenté par Perthame [69] :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \chi \nabla \cdot [\rho \nabla c] = \Delta \rho, \\ \Delta c = -\rho. \end{cases}$$

Ici, ρ désigne la densité de cellules et c la concentration en substances chimiques. On trouve dans la référence des résultats d'existence et d'unicité en temps long pour un domaine infini. On retrouve également un système analogue (parabolique-elliptique) en astro-physique (cf. Chavanis *et al.* [13]) avec l'équation de Smoluchowski :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot [\theta \nabla \rho + \rho \nabla \phi], \\ \Delta \phi = 4\pi g \rho. \end{cases}$$

ρ désigne alors la densité d'étoiles et ϕ le potentiel gravitationnel. Dans [76], on trouve une preuve d'existence en temps court pour des données générales. Mais dans tous les cas, les propriétés des équations paraboliques contribuent largement à l'établissement des résultats, ce qui rend ce travail sur le couplage hyperbolique-elliptique innovant.

À noter par ailleurs que l'étude complète de ce système se fait dans un domaine Ω quelconque (régulier). On ne se limite pas au cas périodique comme ce sera le cas dans l'étude du modèle DLMN. Cela provient du changement de nature du système lors du passage de u à $\nabla\phi$, *i.e.* de DLMN à DLMN-potentiel (qui élimine l'opérateur différentiel d'ordre 2 sur la vitesse à l'origine des termes de bord dans les intégrations par parties), puis du passage de DLMN-potentiel à ABV (qui élimine les effets thermiques dus à l'opérateur d'ordre 2 sur la température).

On choisit de présenter les résultats par degré de régularité décroissant : on établit dans une première partie un résultat d'existence et d'unicité en temps court d'une solution au système (3.1) pour une donnée initiale régulière, avec une approximation du temps d'existence. On démontre également des propriétés algébriques satisfaites par les éventuelles solutions dans le cas de données plus générales. On prouve ensuite un résultat explicite qui fournit une expression de la moyenne des solutions, quelle que soit la régularité de la donnée initiale (bornée). On s'intéresse enfin au cas de la dimension 1, où on explicite des solutions globales en temps pour différents types de données initiales.

On note par la suite $\text{ABV}[Z^0, \xi, \omega]$ le système (3.1) pour la donnée initiale Z^0 , la pulsation ξ et dans le domaine ω . Par défaut, on appelle « modèle ABV » le système (3.1) avec les données Y_0, ψ et Ω .

3.1 ÉTUDE QUALITATIVE DU MODÈLE ABV

3.1.1 Restrictions sur le potentiel

On remarque en premier lieu que le potentiel de vitesse ϕ ne peut être défini qu'à une constante additive près, puisque seules ses dérivées spatiales interviennent dans le système. La condition de jauge choisie dans ce document est une condition de moyenne nulle :

$$\int_{\Omega} \phi(x) \, dx = 0. \tag{3.2}$$

En particulier, cela permet d'appliquer l'inégalité de Poincaré-Wirtinger à ϕ :

$$\|\phi\|_0 \leq C_{PW}(\Omega, d) \cdot \|\nabla\phi\|_0.$$

Le système ABV présente un couplage entre une équation hyperbolique (transport de la phase gazeuse) avec une équation elliptique (équation de Poisson sur le potentiel de vitesse). La première est une équation d'évolution tandis que la seconde est stationnaire. Cette remarque est la base du schéma numérique développé dans le cadre de la résolution de ce modèle en dimensions 2 et 3. Ceci entraîne également une seconde remarque sur la donnée initiale pour la vitesse : étant donnée la fraction massique initiale Y_0 , le champ de vitesse initial $\nabla\phi_0$ doit nécessairement vérifier l'équation :

$$\Delta\phi_0 = \psi(0) \left(Y_0(x) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y_0(x') \, dx' \right). \tag{3.3}$$

On sera amené au cours de la démonstration à utiliser les notations suivantes :

$$\Psi(t) = \int_0^t \psi(\tau) \, d\tau \quad \text{et} \quad \tilde{\Psi}(t) = \int_0^t |\psi(\tau)| \, d\tau.$$

Même si elles ne sont pas mentionnées, on supposera toujours dans la suite que les hypothèses (3.2) et (3.3) sont vérifiées.

3.1.2 Donnée initiale

On s'intéresse à une famille de solutions sur lesquelles s'appliquent des contraintes déduites de considérations physiques évidentes. On est amené naturellement à introduire l'ensemble suivant :

$$\mathbb{Y} = \{Y \in L^\infty(\Omega) : Y \in [0, 1] \text{ presque partout dans } \Omega\}.$$

On se restreint dans la suite de l'étude au cas où $Y_0 \in \mathbb{Y}$: la question se pose alors de savoir si pour tout temps t , la (ou les) solution(s) éventuelle(s) $Y(t, \cdot)$ reste(nt) dans \mathbb{Y} . C'est l'objet des **lemmes** 3.5 et 3.9, qui sont des principes du maximum appliqués à ce système particulier. D'autres questions inhérentes à ce type d'étude concernent la transmission (ou non) des propriétés de la donnée initiale à la solution courante sur tout l'intervalle d'existence. Le **lemme** 3.7 assure par exemple que la solution conserve les propriétés de parité de Y_0 . En dimension 1, on verra que la méthode des caractéristiques assure que la solution conserve un profil semblable à celui de la donnée initiale. De manière générale, Y_0 est une donnée dont on étudie l'influence sur les solutions. Toutefois, on s'intéresse dans un premier temps à la question de l'existence et/ou de l'unicité des solutions au système (3.1).

3.1.3 Résultat d'existence et d'unicité en temps fini

On présente ci-dessous le résultat prouvé initialement par Dellacherie et Lafitte [27] et amélioré par Penel *et al.* [67]. Les améliorations portent sur la précision des inégalités et sur la donnée d'une estimation du temps d'existence, qui débouchent sur une existence globale pour des données initiales suffisamment petites (ou des pulsations petites).

On rappelle la définition de certaines notations introduites dans le chapitre 2, à savoir :

$$\mathcal{W}_{s, \mathcal{T}}(\Omega) = \mathcal{C}^0([0, \mathcal{T}], L^2(\Omega)) \cap L^\infty([0, \mathcal{T}], \mathcal{H}^s(\Omega)),$$

$s_0 = \lfloor d/2 \rfloor + 1$ et $|\psi|_{\infty, \mathcal{T}} = \sup_{t \in [0, \mathcal{T}]} |\psi(t)|$. De plus, on pose :

$$\mu(Y) = \mu_\Omega(Y) := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega Y(x) \, dx.$$

On énonce alors les deux résultats suivants, dont découlent les corollaires. Le premier théorème concerne le résultat d'existence et d'unicité à proprement parler, tandis que le second donne une approximation du temps d'existence en fonction de Y_0 et de ψ .

Théorème 3.1 (Théorème 2.1, [27])

Soit $Y_0 \in \mathcal{H}^s(\Omega)$, où $s \geq s_0 + 1$. Alors il existe un temps $\mathcal{T}_0 > 0$ dépendant de Y_0 et de ψ pour lequel le système (3.1) admet une unique solution classique Y dans $\mathcal{W}_{s,\mathcal{T}}(\Omega)$, pour \mathcal{T} au moins égal à \mathcal{T}_0 .

Théorème 3.2

Sous les hypothèses du Théorème 3.1, la solution Y appartient à l'espace $\mathcal{W}_{s,\mathcal{T}_0}(\Omega)$ pour tout $\mathcal{T}_0 > 0$ tel que :

$$\|Y_0 - \mu(Y_0)\|_s \int_0^{\mathcal{T}_0} |\psi(\tau)| \, d\tau \leq \frac{1}{e \cdot C_{abv}(s, d, \Omega)}. \quad (3.4)$$

C_{abv} est une constante universelle dont l'expression est donnée dans la démonstration.

Remarque 5 – Comme nous le verrons dans la suite, l'estimation (3.4) provient d'une condition nécessaire de convergence forte du système itératif utilisé pour construire la solution du modèle ABV. Il n'est donc pas prouvé que cette relation est optimale. Toutefois, elle est compatible avec trois cas particuliers pour lesquels on peut conclure :

- Si $Y_0 \equiv 1 \in \mathcal{H}^\infty(\Omega)$, ce qui correspond au cas où le fluide 1 occupe tout le domaine, on vérifie que $Y \equiv 1$ est l'unique solution de (3.1).
- De même, si $Y_0 \equiv 0$, la solution $Y \equiv 0$, pour laquelle le fluide 1 est absent, convient et est unique. Il en est de même pour toute donnée initiale constante.
- Enfin, si $\psi \equiv 0$, le système n'évolue pas et $Y \equiv Y_0$ est solution.

Le temps d'existence est infini dans ces trois cas, ce que fournit l'inégalité (3.4). Une première estimation du temps d'existence avait été donnée dans [27], définie par trois contraintes. Les modifications (raffinement de l'étude de la suite $\|Y^{(k)}\|_{s,\mathcal{T}}$ et du processus itératif pour la contraction) apportées ici dans la démonstration permettent de s'abstraire de ces contraintes pour ne plus garder que (3.4). \diamond

On peut par ailleurs interpréter le **théorème 3.2** de deux points de vue différents : soit en considérant la bulle initiale et un temps $\mathcal{T} > 0$ donné, pour lesquels on a existence d'une solution locale pour toute pulsation ψ vérifiant (3.4), soit en considérant les autres paramètres de l'expérience (ψ et Ω), pour lesquels on a existence d'une solution globale (sous une condition d'intégrabilité de ψ) pour toute donnée initiale suffisamment proche de sa moyenne. On traduit ces deux points de vue par les corollaires suivants.

Corollaire 3.1

Soit Y_0 une fonction non constante appartenant à $\mathcal{H}^{s_0+1}(\Omega)$. Pour tout temps $\mathcal{T} > 0$ et pour toute pulsation ψ continue sur $[0, \mathcal{T}]$ et vérifiant l'inégalité :

$$\|\psi\|_{L^1(0,\mathcal{T})} \leq \frac{1}{e \cdot C_{abv}(s, d, \Omega) \cdot \|Y_0 - \mu(Y_0)\|_{s_0+1}},$$

il existe une unique solution $Y \in \mathcal{W}_{s_0+1,\mathcal{T}}(\Omega)$ au système (3.1).

Corollaire 3.2

Soit ψ une fonction appartenant à $\mathcal{C}^0(0, +\infty) \cap L^1(0, +\infty)$. Alors il existe une unique solution Y globale en temps pour toute donnée initiale $Y_0 \in \mathcal{H}^{s_0+1}(\Omega)$ telle que :

$$\|Y_0 - \mu(Y_0)\|_{s_0+1} \leq \frac{1}{e \cdot C_{abv}(s, d, \Omega) \cdot \|\psi\|_{L^1}}.$$

Avant d'établir les preuves des théorèmes, on énonce le lemme suivant qui fournit la régularité du champ de vitesse :

Lemme 3.1

Soit $Y \in \mathcal{W}_{s, \mathcal{T}}(\Omega)$ pour $s \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{T} > 0$. Pour $\psi \in \mathcal{C}^0([0, +\infty[)$, il existe une unique solution ϕ au système :

$$\begin{cases} \Delta \phi(t, \mathbf{x}) = \psi(t) \left(Y(t, \mathbf{x}) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y(t, \mathbf{x}') \, d\mathbf{x}' \right), \\ \nabla \phi \cdot \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \int_{\Omega} \phi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0. \end{cases}$$

Cette solution vérifie $\nabla \phi \in \mathcal{W}_{s+1, \mathcal{T}}(\Omega)$ et :

$$\begin{aligned} \|\nabla \phi(t, \cdot)\|_0 &\leq C_{PW}(d, \Omega) \cdot |\psi(t)| \cdot \|Y(t, \cdot)\|_0, \\ \text{et} \quad \|\nabla \phi(t, \cdot)\|_{s+1} &\leq C_{ell}(s, d, \Omega) \cdot |\psi(t)| \cdot \|Y(t, \cdot)\|_s. \end{aligned}$$

Pour la démonstration de ce lemme, on se réfère à [27, Lemme 3.2]. Démontrons maintenant le **théorème 3.1**.

Démonstration : La démonstration se décompose entre trois parties, deux pour l'existence – caractère borné dans $\mathcal{W}_{s, \mathcal{T}}(\Omega)$ et convergence dans $\mathcal{W}_{0, \mathcal{T}}(\Omega)$ d'une certaine suite – et une pour l'unicité (pour la partie unicité, cf. **lemme 3.4** sous des hypothèses plus générales).

La méthode est de type « itérées de Picard ». On construit la solution comme la limite d'une suite $Y^{(k)}$ définie itérativement par :

- ① On se donne $Y^{(k=0)} = Y_0 \in \mathcal{H}^s(\Omega)$ avec $s > s_0$.
- ② Étant donné $Y^{(k)}$, on détermine $\phi^{(k)}$ en résolvant le système :

$$\begin{cases} \Delta \phi^{(k)}(t, \mathbf{x}) = \psi(t) \left(Y^{(k)}(t, \mathbf{x}) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y^{(k)}(t, \mathbf{x}') \, d\mathbf{x}' \right), \\ \nabla \phi^{(k)} \cdot \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (\text{Th.3.2.i})$$

- ③ On construit ensuite $Y^{(k+1)}$ à l'aide de l'équation :

$$\begin{cases} \partial_t Y^{(k+1)} + \nabla \phi^{(k)} \cdot \nabla Y^{(k+1)} = 0, \\ Y^{(k+1)}(0, \cdot) = Y_0. \end{cases} \quad (\text{Th.3.2.ii})$$

Il faut cependant s'assurer que le processus itératif est bien défini. Ce point découle de l'application des **lemmes 2.10** et **3.1**. On en déduit également que, pour tout k , $Y^{(k)} \in \mathcal{W}_{s, \mathcal{T}_k}(\Omega)$ et $\nabla \phi^{(k)} \in \mathcal{W}_{s+1, \mathcal{T}_k}(\Omega)$ pour un certain $\mathcal{T}_k > 0$.

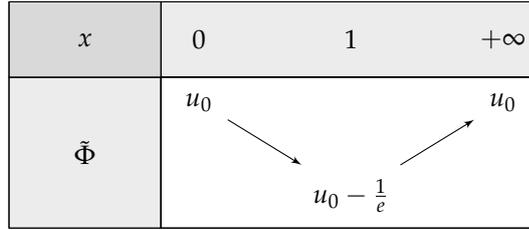
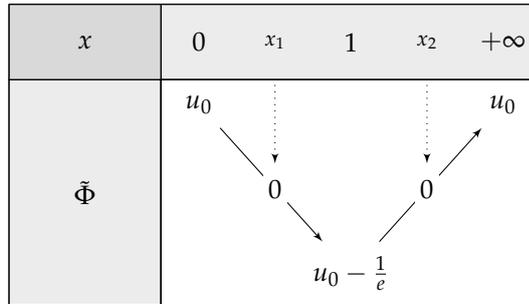

 (a) Cas $u_0 > e^{-1}$

 (b) Cas $u_0 < e^{-1}$

 FIG. 3.1 – Variations de la fonction $\tilde{\Phi}(x) = u_0 - xe^{-x}$

Le temps \mathcal{T}_k dépend *a priori* de l'indice d'itération k , mais comme chaque solution existe sur le domaine d'existence temporelle des données de l'EDP et comme $\mathcal{T}_0 = +\infty$ au vu du choix fait pour $Y^{(k=0)}$ (indépendant du temps), la suite est définie pour tout temps $\mathcal{T} > 0$ (pour pouvoir appliquer les résultats théoriques, il faut un temps fini). On donne dans la suite des contraintes sur le « temps d'existence » qui assurent la convergence des suites.

Les estimations déduites des équations (Th.3.2.i-Th.3.2.ii) par application des **lemmes 2.10** et **3.1** donnent, avec $\|\nabla\nabla\phi^{(k)}\|_{s-1} = \|\text{Hess}(\phi^{(k)})\|_{s-1} \leq \|\nabla\phi^{(k)}\|_s$ ¹:

$$\begin{aligned}
 \|Y^{(k+1)}\|_{s,\mathcal{T}} &\leq \|Y_0\|_s \exp \left[C_{adv,0}(s) \int_0^{\mathcal{T}} \|\text{Hess}(\phi^{(k)})\|_{s-1}(t) dt \right] \\
 &\leq \|Y_0\|_s \exp \left[C_{adv,0}(s) \cdot C_{ell}(s-1) \cdot \|Y^{(k)}\|_{s-1,\mathcal{T}} \int_0^{\mathcal{T}} |\psi(t)| dt \right] \\
 &\leq \|Y_0\|_s \exp [C_{abv}(s) \cdot \|Y^{(k)}\|_{s-1,\mathcal{T}} \cdot \tilde{\Psi}(\mathcal{T})], \\
 &\leq \|Y_0\|_s \exp [C_{abv}(s) \cdot \|Y^{(k)}\|_{s,\mathcal{T}} \cdot \tilde{\Psi}(\mathcal{T})],
 \end{aligned}$$

avec $C_{abv}(s) = C_{adv,0}(s) \cdot C_{ell}(s-1)$.

On introduit alors la suite récurrente (u_k) définie par $u_0 = C_{abv}(s) \cdot \|Y_0\|_s \cdot \tilde{\Psi}(\mathcal{T})$, puis par $u_{k+1} = u_0 \exp u_k$, de sorte que l'on ait la majoration $C_{abv}(s) \cdot \|Y^{(k)}\|_{s,\mathcal{T}} \cdot \tilde{\Psi}(\mathcal{T}) \leq u_k$.

Étudions la suite (u_k) , qui est une suite récurrente non linéaire d'ordre 1. La positivité est évidente, du fait que $u_0 \geq 0$. En notant $\Phi(x) = u_0 \exp x$, on a $u_{k+1} = \Phi(u_k)$. Les variations et les éventuels points fixes de Φ déterminent donc le comportement de la suite. La fonction continue Φ étant croissante, la suite est monotone. On s'intéresse ensuite aux points fixes de Φ , solutions de l'équation $\Phi(x) = x$, soit encore $\tilde{\Phi}(x) = 0$ pour $\tilde{\Phi}(x) = u_0 - x \exp(-x)$. Les variations de $\tilde{\Phi}$ sont résumées dans les figures 3.1.

Ainsi, si $u_0 > e^{-1}$, $\tilde{\Phi}$ est strictement positive, Φ n'admet aucun point fixe, et la suite est croissante non majorée (sinon, elle convergerait vers ℓ qui serait alors un point fixe de Φ : absurde) donc diverge.

¹ On omet dans la suite les références aux paramètres d et Ω dans les constantes afin d'alléger les notations.

En revanche, pour $u_0 \leq e^{-1}$, l'équation $\Phi(x) = x$ admet deux racines (éventuellement une racine double égale à 1 dans le cas $u_0 = e^{-1}$) vérifiant $x; \exp(-x_i) = u_0$ et $0 < x_1 \leq 1 \leq x_2$. On en déduit que $\exp(-x_1) < 1$ et $x_1 > u_0$. Par récurrence, il vient $u_k \leq u_{k+1} \leq x_1$ et la suite converge vers x_1 .

En conclusion, la suite (u_k) converge si et seulement si $u_0 e \leq 1$. D'où, sous l'hypothèse :

$$e \cdot C_{abv}(s) \cdot \|Y_0\|_s \cdot \tilde{\Psi}(\mathcal{I}) \leq 1, \quad (\text{Th.3.2.iii})$$

la suite $(Y^{(k)})$ est bornée dans $\mathcal{W}_{s,\mathcal{I}}(\Omega)$ avec pour majorant :

$$\|Y^{(k)}\|_{s,\mathcal{I}} \leq \frac{u_k}{C_{abv}(s) \cdot \tilde{\Psi}(\mathcal{I})} \leq \frac{x_1}{C_{abv}(s) \cdot \tilde{\Psi}(\mathcal{I})} \leq e^{x_1} \|Y_0\|_s. \quad (\text{Th.3.2.iv})$$

D'une part, le caractère borné de la suite permet de justifier que la suite de fonctions $t \mapsto \|Y^{(k)}(t, \cdot)\|_0$ est équicontinue et uniformément bornée dans $\mathcal{C}^0([0, \mathcal{I}])$. Le théorème d'Arzelà-Ascoli assure alors l'existence d'une sous-suite $(Y^{(k')})$ qui converge fortement dans $\mathcal{C}^0([0, \mathcal{I}], L^2(\Omega))$. D'autre part, en considérant l'autre espace qui compose $\mathcal{W}_{s,\mathcal{I}}(\Omega)$, la propriété de bornitude fournit la convergence faible- \star d'une sous-suite $(Y^{(k'')})$ de $(Y^{(k')})$ dans $L^\infty([0, \mathcal{I}], \mathcal{H}^s(\Omega))$. Dans un souci de clarté, on conserve la notation $(Y^{(k)})$ pour la sous-suite faiblement- \star convergente dans $\mathcal{W}_{s,\mathcal{I}}(\Omega)$ et on introduit sa limite $\tilde{Y} \in \mathcal{W}_{s,\mathcal{I}}(\Omega)$.

L'étape suivante consiste à prouver que la suite $Y^{(k)}$ converge fortement dans $\mathcal{W}_{0,\mathcal{I}}(\Omega)$. En effet, on a, par soustraction de deux étapes successives du processus itératif :

$$\begin{cases} \partial_t(Y^{(k+1)} - Y^{(k)}) + \nabla\phi^{(k)} \cdot \nabla(Y^{(k+1)} - Y^{(k)}) = -(\nabla\phi^{(k)} - \nabla\phi^{(k-1)}) \cdot \nabla Y^{(k)}, \\ (Y^{(k+1)} - Y^{(k)})(0, \cdot) = 0. \end{cases}$$

L'estimation d'énergie L^2 (cf. **lemme 2.10**) qui découle de ce système s'écrit, du fait que $s - 1 \geq s_0$:

$$\begin{aligned} & e^{-\chi_0^{(k)}(t)} \left\| \left(Y^{(k+1)} - Y^{(k)} \right) (t, \cdot) \right\|_0 \\ & \leq \int_0^t e^{-\chi_0^{(k)}(\tau)} \left\| \left(\nabla\phi^{(k)} - \nabla\phi^{(k-1)} \right) \cdot \nabla Y^{(k)}(\tau, \cdot) \right\|_0 d\tau, \\ & \leq C_M(0, s - 1, d) \cdot \|Y^{(k)}\|_{s,\mathcal{I}} \int_0^t e^{-\chi_0^{(k)}(\tau)} \left\| \left(\nabla\phi^{(k)} - \nabla\phi^{(k-1)} \right) (\tau, \cdot) \right\|_0 d\tau, \\ & \leq \underbrace{C_M \cdot e^{x_1} \|Y_0\|_s \cdot C_{PW}}_{C_{abv,2}} \sup_{t \in [0, \mathcal{I}]} |\psi(t)| \int_0^t e^{-\chi_0^{(k)}(\tau)} \left\| \left(Y^{(k)} - Y^{(k-1)} \right) (\tau, \cdot) \right\|_0 d\tau, \end{aligned}$$

en utilisant les **lemmes 2.3 et 3.1**, ainsi que la borne (Th.3.2.iv) pour $\|Y^{(k)}\|_{s,\mathcal{I}}$.

Ici, $\chi_0^{(k)}(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \|\Delta\phi_k(\tau, \cdot)\|_\infty d\tau$, qui est l'exposant optimal.² Or, on a la majoration suivante :

$$\begin{aligned} (\chi_0^{(k)})'(t) & \leq \frac{1}{2} |\psi(t)| \cdot \|Y^{(k)} - \mu(Y^{(k)})\|_\infty(t) \leq |\psi(t)| \cdot \|Y^{(k)}\|_\infty(t) \\ & \leq |\psi(t)| \cdot C_{sob}(s_0) \cdot \|Y^{(k)}\|_{s_0,\mathcal{I}} \leq \chi'(t), \end{aligned}$$

pour $\chi(t) := e^{x_1} \|Y_0\|_s C_{sob}(s_0) \tilde{\Psi}(t)$, où on a utilisé (Th.3.2.iv).

² $\Delta\phi_k \in \mathcal{W}_{s,\mathcal{I}}(\Omega) \subset \mathcal{C}^0([0, \mathcal{I}], \mathcal{H}^{s-1}(\omega)) \subset L^\infty([0, \mathcal{I}] \times \bar{\Omega})$ d'après le **lemme 2.2** et du fait que $s - 1 \geq s_0$.

Ainsi, d'après le **lemme 2.10**, on peut remplacer $\chi_0^{(k)}$ par χ (qui présente la qualité d'être indépendant de k), ce qui donne :

$$e^{-\chi(t)} \left\| \left(Y^{(k+1)} - Y^{(k)} \right) (t, \cdot) \right\|_0 \leq C_{abv,2} \int_0^t e^{-\chi(\tau)} \left\| \left(Y^{(k)} - Y^{(k-1)} \right) (\tau, \cdot) \right\|_0 d\tau.$$

On peut alors itérer, ce qui fournit l'inégalité :

$$\begin{aligned} e^{-\chi(t)} \left\| \left(Y^{(k+1)} - Y^{(k)} \right) (t, \cdot) \right\|_0 &\leq C_{abv,2}^k \int_0^t e^{-\chi(\tau)} \left\| \left(Y^{(1)} - Y^{(0)} \right) (\tau, \cdot) \right\|_0 \frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!} d\tau \\ &\leq \frac{(C_{abv,2} \cdot t)^k}{k!} \left\| Y^{(1)} - Y^{(0)} \right\|_{0, \mathcal{T}}, \end{aligned}$$

puis :

$$\left\| Y^{(k+1)} - Y^{(k)} \right\|_{0, \mathcal{T}} \leq \frac{(C_{abv,2} \cdot \mathcal{T})^k}{k!} \left\| Y^{(1)} - Y^{(0)} \right\|_{0, \mathcal{T}} e^{\chi(\mathcal{T})}.$$

La série de terme général $\left\| Y^{(k+1)} - Y^{(k)} \right\|_{0, \mathcal{T}}$ converge donc, ce qui assure **la convergence forte de la suite $Y^{(k)}$ dans l'espace complet $\mathcal{W}_{0, \mathcal{T}}(\Omega)$ vers $Y \in \mathcal{W}_{0, \mathcal{T}}(\Omega)$ quel que soit $\mathcal{T} > 0$ vérifiant la condition (Th.3.2.iii).**

Ainsi, $Y^{(k)}$ converge fortement dans $\mathcal{W}_{0, \mathcal{T}}(\Omega)$ et faiblement-* dans $\mathcal{W}_{s, \mathcal{T}}(\Omega)$ vers une limite qui, par unicité et par l'inclusion $\mathcal{W}_{s, \mathcal{T}}(\Omega) \subset \mathcal{W}_{0, \mathcal{T}}(\Omega)$, ne peut être que \tilde{Y} , ce qui justifie que $Y = \tilde{Y} \in \mathcal{W}_{s, \mathcal{T}}(\Omega)$. On montre même par interpolation que la suite converge fortement dans tous les espaces $\mathcal{W}_{s', \mathcal{T}}(\Omega)$ pour $s' < s$, mais pas dans $\mathcal{W}_{s, \mathcal{T}}(\Omega)$, où la convergence n'est que faible-*.

De manière identique, en utilisant les résultats de régularité elliptique, $\nabla \phi^{(k)}$ converge dans $\mathcal{W}_{0, \mathcal{T}}(\Omega)$ vers $\nabla \phi \in \mathcal{W}_{s+1, \mathcal{T}}(\Omega)$. Le fait que la limite est un gradient provient du fait que l'espace des champs de gradient est fermé.

Reste à prouver que les limites Y et $\nabla \phi$ sont bien solutions du modèle ABV. Pour cela, on écrit, d'après (Th.3.2.i) et (Th.3.2.ii) :

$$\begin{aligned} Y^{(k+1)} &= Y_0 - \int_0^t \nabla \phi^{(k)} \cdot \nabla Y^{(k+1)} d\tau, \\ \forall \varphi \in \mathcal{H}^1(\Omega), \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \phi^{(k)} dx &= -\psi(t) \int_{\Omega} \varphi (Y^{(k)} - \mu(Y^{(k)})) dx. \end{aligned}$$

Comme tous les composants de ces égalités sont dans $\mathcal{C}^0([0, \mathcal{T}] \times \bar{\Omega})$, par convergence dominée, on a :

$$\begin{aligned} Y &= Y_0 - \int_0^t \nabla \phi \cdot \nabla Y d\tau, \\ \forall \varphi \in \mathcal{H}^1(\Omega), \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \phi dx &= -\psi(t) \int_{\Omega} \varphi (Y - \mu(Y)) dx. \end{aligned}$$

On retrouve alors la dérivabilité en temps de Y , et le fait que le couple $(Y, \nabla \phi)$ vérifie bien les équations du modèle ABV. ■

Remarque 6 – La solution Y obtenue dans le **théorème 3.1** peut être qualifiée de **classique** au sens où on a $Y \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega} \times [0, \mathcal{T}])$. En effet, par le **corollaire 2.1**, $Y \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega} \times [0, \mathcal{T}])$ puisque $s \geq s_0 + 1 > \frac{d}{2}$. De même, $\partial_t Y = -\nabla \phi \cdot \nabla Y \in \mathcal{W}_{s-1, \mathcal{T}}(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\bar{\Omega} \times [0, \mathcal{T}])$ pour la même raison.

Par ailleurs, il est à noter que ce résultat reste valable si la fonction ψ n'est définie (et continue) que sur un intervalle $[0, \mathcal{T}_\psi]$. Le temps d'existence est alors le minimum de \mathcal{T}_ψ et de \mathcal{T} vérifiant (Th.3.2.iii). ◇

On prouve ensuite le **théorème 3.2** sur le temps d'existence, en améliorant l'estimation (Th.3.2.iii).

Démonstration : On sait, d'après le théorème précédent, que, pour $Y_0 \in \mathcal{H}^s$ avec $s > s_0$ et $\psi \in \mathcal{C}^0(0, +\infty)$, il existe une unique solution classique $Y \in \mathcal{W}_{s, \mathcal{T}}(\Omega)$ avec $\mathcal{T} > 0$ (éventuellement $\mathcal{T} = +\infty$) imposé par la condition (Th.3.2.iii).

Soit c_0 la constante telle que $\|Y_0 - c_0\|_s = \min_{c \in \mathbb{R}} \|Y_0 - c\|_s$, i.e. :

$$c_0 = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y_0(x) dx = \mu(Y_0).$$

En effet, on a $\|Y_0 - c\|_s^2 = \|Y_0\|_s^2 - 2c|\Omega|\mu(Y_0) + |\Omega|c^2$. Ce polynôme du second degré en c atteint bien son minimum en $c_0 = \mu(Y_0)$.

On a alors d'une part $\|Y_0 - c_0\|_s \leq \|Y_0\|_s = \|Y_0 - 0\|_s$ (avec égalité si Y_0 est de moyenne nulle), et d'autre part, on remarque que $Y - c_0$ est solution de $\text{ABV}[Y_0 - c_0, \psi, \Omega]$. Comme $Y_0 - c_0 \in \mathcal{H}^s(\Omega)$, on peut appliquer le **théorème 3.1**. Il existe donc une unique solution $Z \in \mathcal{W}_{s, \mathcal{T}'}(\Omega)$, où la contrainte (Th.3.2.iii) se récrit :

$$e \cdot C_{abv} \cdot \|Y_0 - c_0\|_s \int_0^{\mathcal{T}'} |\psi(t)| dt \leq 1.$$

D'où, par unicité, $Y = Z + c_0$ est solution du Syst. (3.1) sur $[0, \mathcal{T}']$. On remarque que $\mathcal{T}' \geq \mathcal{T}$, avec une inégalité stricte ssi $c_0 \neq 0$ et $\mathcal{T} < +\infty$. ■

À noter que l'on pourrait ensuite reprendre tous les raisonnements ci-dessus dans le cas où $Y_0 \in W^{s,p}(\Omega)$ dans le cadre des espaces de Sobolev classique. Cela nécessite d'adapter toutes les estimations utilisées dans la démonstration au cas des espaces de Lebesgue L^p mais l'application directe ne semble pas soulever de problèmes particuliers.

3.1.4 Réflexions sur le temps d'existence

Les **théorèmes 3.1** et **3.2** fournissent un résultat d'existence en temps court $0 < \mathcal{T} \leq +\infty$ pour une donnée initiale régulière. Ce temps \mathcal{T} est restreint par la condition (3.4). Toutefois, il faut garder à l'esprit que, même si au cours de la démonstration, une attention toute particulière a été portée à l'optimalité des estimations, **la condition obtenue est propre à la méthode choisie pour la preuve**. Il n'est en aucun cas affirmé que l'inégalité (3.4) est une condition nécessaire d'existence de la solution. On soulève donc dans ce paragraphe la question de l'optimalité de temps d'existence, ce qui l'on peut reformuler comme suit : si le temps d'existence n'est pas optimal, cela implique que l'on peut prolonger la solution au-delà de l'intervalle $[0, \mathcal{T}_0]$ donné par (3.4) ; si, en revanche, il y a optimalité, il convient de s'interroger sur le facteur empêchant tout prolongement, comme une perte de régularité et/ou un phénomène d'explosion.

Notons en premier lieu que l'estimation (3.4) est plus satisfaisante que (Th.3.2.iii), compte-tenu de la remarque 5, p. 77. Elle fournit en effet les résultats attendus dans un certain nombre de cas particuliers. De plus, si la condition (Th.3.2.iii) était monotone par rapport à la norme de la donnée initiale, ce n'est plus le cas pour (3.4).

Il faut ensuite distinguer deux cas, selon l'existence d'une borne supérieure des temps \mathcal{T}_0 vérifiant (3.4) :

- ❶ Soit cette borne n'existe pas, ce qui fournit une existence globale. Cette situation se produit dans le cas $\psi \in L^1(0, +\infty)$ de norme suffisamment petite (cf. **Corrolaire 3.2**).
- ❷ Soit cette borne existe, et on la note $\widetilde{\mathcal{T}}_1 > 0$. C'est alors un maximum, par continuité de $\widetilde{\Psi}$, ce qui se traduit par le cas d'égalité dans (3.4) :

$$e \cdot C_{abv}(s) \cdot \|Y_0 - \mu(Y_0)\|_s \cdot \widetilde{\Psi}(\widetilde{\mathcal{T}}_1) = 1.$$

On étudie ce cas dans la suite.

Estimation a priori

Montrons tout d'abord une nouvelle majoration pour la solution Y du modèle, qui est la même que pour les termes de la suite construite en (Th.3.2.i-Th.3.2.ii). On note $\mathcal{T}_1 \leq \widetilde{\mathcal{T}}_1$ le temps vérifiant le cas d'égalité dans l'estimation non optimale (Th.3.2.iii), i.e. :

$$e \cdot C_{abv}(s) \cdot \|Y_0\|_s \cdot \widetilde{\Psi}(\mathcal{T}_1) = 1.$$

Alors :

- ❶ De la convergence forte de $(Y^{(k)})$ vers Y dans $\mathcal{W}_{s-1, \mathcal{T}_1}(\Omega)$ et de la majoration $\|Y^{(k)}\|_{s-1, \mathcal{T}_1} \leq e \|Y_0\|_s$ ($x_0 = 1$ lorsqu'il y a égalité dans l'estimation du temps d'existence), on déduit que $\|Y\|_{s-1, \mathcal{T}_1} \leq e \|Y_0\|_s$ par passage à la limite.
- ❷ Par ailleurs, l'estimation d'énergie relative à l'équation d'advection dont Y est solution s'écrit ici :

$$\|Y\|_{s, \mathcal{T}_1} \leq \|Y_0\|_s \exp\left(C_{abv}(s, d, \Omega) \|Y\|_{s-1, \mathcal{T}_1} \widetilde{\Psi}(\mathcal{T}_1)\right) \leq e \|Y_0\|_s, \quad (3.5)$$

en utilisant la majoration établie en ❶ et la définition de \mathcal{T}_1 .

Cette estimation n'est vraie que sur $[0, \mathcal{T}_1]$, où l'on a prouvé la convergence de $Y^{(k)}$ vers Y . Si l'on considère le système itératif (Th.3.2.i-Th.3.2.ii) avec pour initialisation $Z^{(k=0)} = Y_0 - \mu(Y_0)$ et en imposant la condition initiale $Z^{(k+1)}(0, \cdot) = Y_0 - \mu(Y_0)$ dans (Th.3.2.ii), on définit une suite $Z^{(k)}$ qui converge vers $Y - \mu(Y_0)$ sur $[0, \widetilde{\mathcal{T}}_1]$. On a alors la majoration (3.5) adaptée pour ce cas :

$$\|Y - \mu(Y_0)\|_{s, \widetilde{\mathcal{T}}_1} \leq e \|Y_0 - \mu(Y_0)\|_s. \quad (3.6a)$$

Comme nous le verrons dans la suite (cf. § 3.1.7), la fonction $\mu(Y)$ est connue explicitement en fonction de t (on la note μ_1). On en déduit l'estimation :

$$\|Y\|_{s, \widetilde{\mathcal{T}}_1}^2 \leq e^2 \|Y_0 - \mu_1(0)\|_s^2 + 2|\Omega| \sup_{t \in [0, \widetilde{\mathcal{T}}_1]} [\mu_1(0)\mu_1(t)] - \mu_1(0)^2 |\Omega|. \quad (3.6b)$$

On a donc une estimation a priori sur $[0, \widetilde{\mathcal{T}}_1]$.

Explosion en temps fini

Comme évoqué précédemment, l'optimalité de la condition (3.4) se traduit par l'impossibilité de prolonger la solution sur un intervalle de temps plus grand. Il convient donc de s'intéresser à la variable qui empêche de prolonger, par exemple par un phénomène d'explosion en temps fini.

Parmi les systèmes d'équations servant à modéliser les écoulements en mécanique des fluides, le système d'Euler pour un écoulement parfait et incompressible a fait l'objet de nombreuses études (Leray, Kato, Constantin, ...), qui ont servi de préliminaires pour l'analyse de systèmes plus complexes. On rappelle que les équations d'Euler, en l'absence de forces extérieures, prennent la forme :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u}(0, \cdot) = \mathbf{u}^0. \end{cases}$$

On se place soit dans \mathbb{R}^d , $d \in \{2, 3\}$, soit dans $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ régulier (auquel cas on ajoute au système une condition de glissement $\mathbf{u} \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0$). Il a été prouvé que ce système admettait une unique solution classique dans le cas d'une donnée initiale de type Sobolev en dimension 2 (solution globale en temps, Kato [53]) et en dimension 3 (solution locale en temps, Bourguignon et Brezis [10], Temam [86]). Dans ce dernier cas, la solution a pour régularité :

$$\mathbf{u} \in \mathcal{C}^0([0, \mathcal{T}], \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^3)) \cap \mathcal{C}^1([0, \mathcal{T}], \mathcal{H}^{s-1}(\mathbb{R}^3)).$$

Le temps d'existence \mathcal{T} a fait l'objet d'un certain nombre d'articles, afin de déterminer le phénomène expliquant l'explosion en temps fini constatée dans les simulations numériques. Dans Beale *et al.* [5], il a été prouvé que le temps d'existence \mathcal{T} est le plus petit temps pour lequel :

$$\int_0^{\mathcal{T}} \|\nabla \wedge \mathbf{u}(t, \cdot)\|_{\infty} dt = +\infty.$$

Ainsi, c'est l'accumulation de vorticité (que l'on note souvent $\omega = \nabla \wedge \mathbf{u}$) qui explique que la solution n'est pas globale. Suite à ce résultat, il a été remarqué qu'on avait également, pour le même temps, l'explosion du tenseur de déformation linéarisé (cf. Ponce [72]) :

$$\int_0^{\mathcal{T}} \|D(\mathbf{u})\|_{\infty}(t) dt = +\infty.$$

Différents résultats à ce sujet sont donnés par Constantin [20]. Pour faire le lien avec les équations plus complexes (et plus réalistes) de Navier-Stokes, il existe un résultat d'explosion : toute solution des équations de Navier-Stokes ne peut exploser sur un intervalle de temps si la solution des équations d'Euler avec les mêmes données n'y explose pas (cf. Constantin [19]).

Des études sur le temps d'existence et sur les phénomènes d'explosion en temps fini ont été menées sur d'autres équations (paraboliques), comme par exemple par Ball [3], Souplet et Weissler [82], sur l'équation :

$$\partial_t \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^{\gamma-1} \mathbf{u}.$$

Temps d'existence pour le modèle abstrait

Sans apporter de réponse à la problématique de ce paragraphe, on donne quelques pistes d'étude sur le prolongement des solutions. Dans le cas du modèle ABV, la quantité responsable de l'explosion (s'il y en a une) ne peut être le rotationnel du champ de vitesse comme pour les équations d'Euler, puisque $\nabla \wedge \nabla \phi = 0$.

On sait qu'il existe une solution $Y_1 \in \mathcal{W}_{s, \mathcal{T}_1}(\Omega)$ avec \mathcal{T}_1 vérifiant (3.4).³ Par l'inclusion $\mathcal{W}_{s, \mathcal{T}}(\Omega) \subset \mathcal{C}^0([0, \mathcal{T}], \mathcal{H}^{s-\eta}(\Omega))$ pour tout η dans $]0, s]$ (**lemme 2.2**), la fonction $Y_1(\mathcal{T}_1, \cdot)$ appartient à $\mathcal{H}^{s-\eta}(\Omega)$. En revanche, comme $Y_1 \in L^\infty([0, \mathcal{T}], \mathcal{H}^s(\Omega))$, on ne peut *a priori* définir $Y_1(\mathcal{T}_1, \cdot)$ comme une fonction de \mathcal{H}^s . Pour pouvoir prolonger la solution en utilisant de nouveau le **théorème 3.1**, plusieurs possibilités se présentent :

- ① soit la solution a une régularité plus grande que celle fournit par le théorème, avec $Y_1(\mathcal{T}_1, \cdot) \in \mathcal{H}^s$; on peut alors appliquer le résultat au problème $\text{ABV}[Y_1(\mathcal{T}_1, \cdot), \psi(\mathcal{T}_1 + \cdot), \Omega]$ dans \mathcal{H}^s .
- ② soit ce n'est pas le cas, et on applique le résultat à $\text{ABV}[Y_1(\mathcal{T}_1, \cdot), \psi(\mathcal{T}_1 + \cdot), \Omega]$ dans $\mathcal{H}^{s-\eta}$. Cependant, le **théorème 3.1** n'a été prouvé que pour des indices de Sobolev s entiers. Il faut pour cela adapter la preuve à la définition des espaces de Sobolev à indices réels dans le cas d'un domaine borné (*cf.* invariance par difféomorphisme, §2.1), en estimant la norme additionnelle pour la partie $s - \lfloor s \rfloor$. Ainsi, sous réserve d'extension du théorème au cas non entier, on raisonne comme suit : on suppose $s = m + \varepsilon$, $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq s_0$ et $\varepsilon \in]0, 1[$, en conservant les hypothèses sur Y_0 , à savoir $Y_0 \in \mathcal{H}^s$. On cherche alors à construire une solution $Y \in \mathcal{W}_{m, \mathcal{T}}(\Omega)$ en appliquant successivement le théorème à $s - \eta_k$, pour une certaine suite η_k tendant vers ε .
- ③ la dernière possibilité est enfin d'appliquer le théorème à $\text{ABV}[Y_1(\mathcal{T}_1, \cdot), \psi(\mathcal{T}_1 + \cdot), \Omega]$ dans \mathcal{H}^{s-1} sous réserve que l'on ait $s \geq s_0 + 2$.

Donnons quelques détails pour chacun des trois points ci-dessus. Étant donnée la solution Y_1 sur $[0, \mathcal{T}_1]$, il existe une unique solution Y_2 définie sur l'intervalle $[0, \mathcal{T}_2]$ solution de $\text{ABV}[Y_1(\mathcal{T}_1, \cdot), \psi(\mathcal{T}_1 + \cdot), \Omega]$ avec $Y_1(\mathcal{T}_1, \cdot) \in \mathcal{H}^{s_1^*}$, s_1^* étant égal à s dans le cas ①, $s - \frac{\varepsilon}{2}$ dans le cas ② et $s - 1$ dans le cas ③. Le temps \mathcal{T}_2 est donné ici par :

$$\tilde{\Psi}(\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2) - \tilde{\Psi}(\mathcal{T}_1) = \frac{1}{e \cdot C_{abv}(s_1^*) \cdot \|Y_1(\mathcal{T}_1, \cdot) - \mu_1(\mathcal{T}_1)\|_{s_1^*}}.$$

On suppose bien sûr que ce temps \mathcal{T}_2 existe. Sinon, on aurait une existence globale. On pose alors :

$$Y(t, \mathbf{x}) = \begin{cases} Y_1(t, \mathbf{x}) & \text{si } t \in [0, \mathcal{T}_1], \\ Y_2(t - \mathcal{T}_1, \mathbf{x}) & \text{si } t \in]\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2]. \end{cases}$$

On vérifie que le raccordement est suffisamment régulier pour avoir $Y \in \mathcal{W}_{s_1^*, \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2}(\Omega)$.

³ On note ici $\tilde{\mathcal{T}}_1$ au lieu de \mathcal{T}_1 afin d'alléger les notations.

On poursuit de même, une fois Y_k construite. Il existe une unique solution Y_{k+1} de $\text{ABV}[Y_k(\mathcal{T}_k, \cdot), \psi_k, \Omega]$ pour $\psi_k(t) = \psi(\Sigma_k + t)$, $\Sigma_k = \sum_{j=1}^k \mathcal{T}_j$ et avec l'indice :

$$s_k^* = \begin{cases} s & \text{dans le cas ①,} \\ m + \frac{\varepsilon}{2^k} & \text{dans le cas ②,} \\ s - k & \text{dans le cas ③, sous réserve que } s - k > s_0. \end{cases}$$

On vérifie en annexe A.2 que $\mu(Y_k(t, \cdot)) = \mu(Y(\Sigma_{k-1} + t, \cdot)) = \mu_1(\Sigma_{k-1} + t)$.

La suite (Σ_k) est de plus donnée par :

$$\tilde{\Psi}(\Sigma_{k+1}) = \tilde{\Psi}(\Sigma_k) + \frac{1}{e \cdot C_{abv}(s_k^*) \cdot \|Y_k(\mathcal{T}_k, \cdot) - \mu_1(\Sigma_k)\|_{s_k^*}}.$$

En sommant cette relation pour $k \in \{0, \dots, K\}$ (avec $K = s - s_0 - 1$ dans le cas ③), il vient, avec la convention $\Sigma_0 = 0$:

$$\tilde{\Psi}(\Sigma_{K+1}) = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^K \frac{1}{C_{abv}(s_k^*) \cdot \|Y(\Sigma_k, \cdot) - \mu_1(\Sigma_k)\|_{s_k^*}}. \quad (3.7)$$

La question du temps d'existence se ramène donc à l'étude de la convergence de la série. À noter que pour le cas ③ (le seul qui soit réalisable sans hypothèse supplémentaire), l'égalité (3.7) donne le temps d'existence de la solution, avec $Y \in \mathcal{W}_{s_0, \Sigma_K}(\Omega)$, ce qui constitue un premier résultat de prolongement.

Pour les cas ① et ②, si la solution Y ainsi construite a un temps d'existence fini, cela implique que la suite (Σ_k) converge (notons Σ_∞ sa limite). La relation (3.7) impose donc que la série converge. Il vient donc :

$$\frac{1}{C_{abv}(s_k^*) \cdot \|Y(\Sigma_k, \cdot) - \mu_1(\Sigma_k)\|_{s_k^*}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Comme la constante C_{abv} est croissante par rapport à l'indice de Sobolev, on a dans les deux cas $C_{abv}(s_k^*) \leq C_{abv}(s)$. La condition nécessaire de convergence vers 0 du terme général se traduit donc par :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|Y(\Sigma_k, \cdot) - \mu_1(\Sigma_k)\|_{[s]} = +\infty.$$

Comme la fonction μ_1 est bornée sur \mathbb{R}_+ (par le principe du maximum, cf. **lemme 3.5**), on obtient que l'hypothèse d'un temps d'existence fini impose :

$$\lim_{t \rightarrow \Sigma_\infty} \|Y(t, \cdot)\|_{[s]} = +\infty.$$

On rappelle toutefois que ce résultat est basé soit sur une régularité sur-estimée de la solution, soit sur l'extension du **théorème 3.1** au cas d'indices de Sobolev non entiers.

Par ailleurs, pour évaluer le comportement du terme général de la série, on peut par exemple utiliser l'estimation *a priori* (3.6) appliquée à Y_k en remarquant que :

$$\begin{aligned} \|Y(\Sigma_k, \cdot) - \mu_1(\Sigma_k)\|_{s_k^*} &= \|Y_k(\mathcal{T}_k, \cdot) - \mu(Y_k(\mathcal{T}_k, \cdot))\|_{s_k^*} = \|Y_{k+1}(0, \cdot) - \mu(Y_k(\mathcal{T}_k, \cdot))\|_{s_k^*} \\ &\leq \|Y_{k+1} - \mu(Y_k(\mathcal{T}_k, \cdot))\|_{s_k^*, \mathcal{T}_{k+1}}. \end{aligned}$$

On peut aussi déterminer, avec Y solution du modèle ABV, une estimation en norme $\mathcal{W}_{s, \mathcal{T}}(\Omega)$ pour la fonction $Z(t, \mathbf{x}) = Y(t, \mathbf{x}) - \mu_1(t)$.

La question du temps d'existence reste donc un problème ouvert, même si dans le cas de la dimension 1, nous verrons que les solutions classiques sont globales en temps.

3.1.5 Invariances par homothéties et translations

On présente ici quelques résultats lorsque l'on perturbe les données par dilatation ou par changement d'échelle. On se donne pour cela (m, n, k) trois réels et pour tout $\lambda > 0$, on pose $\Omega_\lambda = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \lambda \mathbf{x} \in \Omega\}$, $Y_{\lambda, n, k}^0 = \lambda^k Y_0(\lambda^n \mathbf{x})$ et $\psi_{\lambda, m, k}(t) = \lambda^{m-k} \psi(\lambda^m t)$.

Lemme 3.2

Si (Y, ϕ) est solution de $\text{ABV}[Y_0, \psi, \Omega]$, alors une solution de $\text{ABV}[Y_{\lambda, n, k}^0, \psi_{\lambda, m, k}, \Omega_\lambda]$ est donnée par :

$$(t, \mathbf{x}) \longmapsto (\lambda^k Y(\lambda^m t, \lambda^n \mathbf{x}), \lambda^{m-2n} \phi(\lambda^m t, \lambda^n \mathbf{x})).$$

Ce résultat peut en particulier permettre des réductions d'échelle d'un point de vue numérique. λ^k , λ^m et λ^n sont les paramètres de dilatation respectifs sur la donnée initiale, la variable de temps et la variable d'espace.

On peut par ailleurs évaluer l'influence de ces changements d'échelle sur le temps d'existence donné par le **théorème 3.2**. On suppose que pour $\lambda = 1$ (cas classique sans changement d'échelle), la contrainte (3.4) est saturée, *i.e.* $\mathcal{T}(\lambda = 1, k = 0, m = 0, n = 0)$ existe et est fini. On évalue en premier lieu le terme $\|Y_{\lambda, n, k}^0 - \mu_{\Omega_\lambda}(Y_{\lambda, n, k}^0)\|_s$:

$$\begin{aligned} \|Y_{\lambda, n, k}^0 - \mu_{\Omega_\lambda}(Y_{\lambda, n, k}^0)\|_s^2 &= \lambda^{2k} \int_{\Omega_\lambda} [Y_0(\lambda^n \mathbf{x}) - \mu_{\Omega_\lambda}(Y_0(\lambda^n \cdot))]^2 d\mathbf{x} \\ &= \lambda^{2k} \left[\|Y_0(\lambda^n \cdot)\|_s^2 - |\Omega_\lambda| \mu_{\Omega_\lambda}(Y_0(\lambda^n \cdot))^2 \right] \\ &= \lambda^{2k} \left[\sum_{|\alpha| \leq s} \int_{\Omega_\lambda} |D^\alpha [Y_0(\lambda^n \cdot)]|^2 d\mathbf{x} - \frac{|\Omega|}{\lambda^{nd}} \mu_\Omega(Y_0)^2 \right] \\ &= \lambda^{2k} \left[\sum_{|\alpha| \leq s} \lambda^{n|\alpha|} \int_{\Omega_\lambda} |D^\alpha Y_0(\lambda^n \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} - \frac{|\Omega|}{\lambda^{nd}} \mu_\Omega(Y_0)^2 \right] \\ &= \lambda^{2k} \left[\sum_{|\alpha| \leq s} \lambda^{n(|\alpha|-d)} \int_\Omega |D^\alpha Y_0(\mathbf{y})|^2 d\mathbf{y} - \frac{|\Omega|}{\lambda^{nd}} \mu_\Omega(Y_0)^2 \right]. \end{aligned}$$

La contrainte de temps s'écrit dans ce cas :

$$\left[\sum_{|\alpha| \leq s} \left(\lambda^{n|\alpha|} \|D^\alpha Y_0\|_0^2 \right) - |\Omega| \cdot \mu_\Omega(Y_0)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{-nd}{2}} C_{abv}(s, d, \Omega, \lambda^n) \cdot \tilde{\Psi} \left(\frac{\mathcal{T}(\lambda, k, m, n)}{\lambda^m} \right) \leq \frac{1}{e}.$$

On constate tout d'abord que le paramètre d'échelle sur la donnée initiale n'influe pas sur le temps d'existence : $\mathcal{T}(\lambda, k, m, n) = \mathcal{T}(\lambda, m, n)$. Si l'on considère ensuite une dilatation uniquement temporelle ($n = 0$), il vient :

$$\|Y_0 - \mu_\Omega(Y_0)\|_s \cdot C_{abv}(s, d, \Omega) \cdot \tilde{\Psi} \left(\frac{\mathcal{T}(\lambda, m, 0)}{\lambda^m} \right) \leq \frac{1}{e},$$

ce dont on déduit :

$$\mathcal{T}(\lambda, m, 0) = \lambda^m \mathcal{T}(1, 0, 0).$$

On énonce également un résultat de translation sur la donnée initiale.

Lemme 3.3

Soit $c \in \mathbb{R}$. Si (Y, ϕ) est solution de $\text{ABV}[Y_0, \psi, \Omega]$, alors une solution de $\text{ABV}[Y_0 - c, \psi, \Omega]$ est $(Y - c, \phi)$.

En combinant les deux lemmes, on constate qu'une dilatation-translation de la donnée initiale se traduit par une dilatation-translation de la solution sous réserve que la pulsation soit dilatée par le facteur inverse. En d'autres termes, pour qu'une solution du système (3.1) pour la donnée initiale $\frac{Y_0 - a}{b - a}$, a et b réels distincts, soit $\frac{Y - a}{b - a}$, la pulsation imposée doit être $(b - a)\psi(t)$.

3.1.6 Autres propriétés pour des données moins régulières

Le **théorème 3.1** repose sur la régularité (de type Sobolev) de la donnée initiale, ce qui ne correspond pas à la régularité des données que l'on souhaite traiter, à savoir des fonctions indicatrices (créneaux). On peut se demander si, en régularisant ces données (seulement bornées) sur une zone de taille ε , on peut prouver l'existence d'une solution faible en faisant tendre ε vers 0. Comme on le verra dans la partie 3.2, le temps d'existence (fini) \mathcal{T}_ε (donné par le **théorème 3.2**, en dimension 1) tend vers 0 avec ε . C'est par le résultat d'existence globale 1D que l'on parvient à construire une solution faible.

À défaut d'existence globale en dimension quelconque (à ce jour), on s'intéresse à des données de régularité de plus en plus faible pour mener une étude qualitative des éventuelles solutions. Les données du problème (3.1) étant Y_0 et ψ , on souhaite étudier la propagation de leurs propriétés aux solutions $(Y, \nabla \phi)$.

Il faut cependant s'interroger sur le sens à donner aux équations du modèle ABV lorsque l'on considère des données moins régulières (on suppose toujours ψ continue sur \mathbb{R}_+ et Ω borné lipschitzien). Introduisons dans un premier temps, pour $\mathcal{T} > 0$, l'espace $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}(\Omega)$ défini par :

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}(\Omega) = L^\infty([0, \mathcal{T}], W^{1,\infty}(\Omega)).$$

On parlera dans la suite de **solutions du modèle ABV dans** $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}(\Omega)$ toute fonction $Y \in \mathcal{Z}_{\mathcal{T}}(\Omega)$ vérifiant :

$$(3.8) \quad \begin{cases} Y(t, \mathbf{x}) = Y_0(\mathbf{x}) - \int_0^t \nabla \phi \cdot \nabla Y(\tau, \mathbf{x}) \, d\tau, & (3.8a) \\ \Delta \phi(t, \mathbf{x}) = \psi(t) \left(Y(t, \mathbf{x}) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y(t, \mathbf{x}') \, d\mathbf{x}' \right), & (3.8b) \\ \nabla \phi \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0, & (3.8c) \end{cases}$$

avec $Y_0 \in W^{1,\infty}(\Omega)$.

En effet, pour $Y \in L^\infty([0, \mathcal{T}] \times \Omega)$, le second membre de l'équation de Poisson (3.8b) est borné. D'où, par les résultats usuels de régularité elliptique, il vient, pour tout $p > 1$, $\nabla \phi \in L^\infty([0, \mathcal{T}], W^{1,p}(\Omega))$, puis, par les injections de Sobolev, $\nabla \phi \in L^\infty([0, \mathcal{T}], \mathcal{C}^{0,1-d/p}(\overline{\Omega}))$ lorsque $p > d$. En particulier, $\nabla \phi \in L^\infty([0, \mathcal{T}], \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}))$. La condition de bord (3.8c) a donc un sens.

Comme $\nabla Y \in L^\infty([0, \mathcal{T}] \times \Omega)$, le produit $\nabla \phi \cdot \nabla Y$ est bien défini, est borné, et appartient à l'espace $L^1([0, \mathcal{T}], L^2(\Omega))$. Ainsi, le terme intégral dans (3.8a) est une fonction continue du temps et différentiable pour presque tout t [11, § II.4.1] à valeurs dans $L^2(\Omega)$ et l'équation (3.8a) est vraie pour tout $t \in [0, \mathcal{T}]$ et pour presque tout $\mathbf{x} \in \Omega$. L'équation (3.1a) du modèle originel a alors un sens pour presque tout t et presque tout \mathbf{x} .

Il ne serait pas possible *a priori* de définir de telles solutions pour une équation de transport isolée avec un champ de vitesse irrégulier. C'est l'EDP elliptique qui ici assure une régularité suffisante au terme de produit pour être défini.

Une fois cet espace et la notion de solutions associées bien définis, on énonce un certain nombre de propriétés. Cependant, si cet espace convient à la formulation (3.8), il n'existe pas de résultats d'existence de solutions, ni de lien entre la régularité de Y_0 et celle d'éventuelles solutions. On impose ici $Y_0 \in W^{1,\infty}(\Omega)$ par compatibilité au temps 0 avec l'espace $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}(\Omega)$, mais il est possible que la régularité des solutions associées à Y_0 soit plus grande.

Unicité

Lemme 3.4

Il existe au plus une solution au système (3.1) dans l'espace $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}(\Omega)$.

Démonstration : Soient $(Y_1, \nabla \phi_1)$ et $(Y_2, \nabla \phi_2)$ deux solutions telles que Y_1 et Y_2 appartiennent à $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}(\Omega)$. On vérifie que, presque partout :

$$\begin{cases} \partial_t(Y_1 - Y_2) + \nabla \phi_1 \cdot \nabla(Y_1 - Y_2) = -\nabla Y_2 \cdot \nabla(\phi_1 - \phi_2), \\ (Y_1 - Y_2)(0, \cdot) = 0, \\ \Delta(\phi_1 - \phi_2) = \psi(t)(Y_1 - Y_2 - \mu(Y_1 - Y_2)), \\ \nabla(\phi_1 - \phi_2) \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

On multiplie la première équation par $Y_1 - Y_2$ et on intègre sur Ω , ce qui donne :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|Y_1 - Y_2\|_0^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \Delta \phi_1 (Y_1 - Y_2)^2 \, dx - \int_{\Omega} (Y_1 - Y_2) \nabla Y_2 \cdot \nabla(\phi_1 - \phi_2) \, dx.$$

Par *Cauchy-Schwarz*, il vient :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|Y_1 - Y_2\|_0^2 \leq \frac{\|\Delta\phi_1\|_\infty}{2} \|Y_1 - Y_2\|_0^2 + \|\nabla Y_2\|_\infty \|Y_1 - Y_2\|_0 \|\nabla(\phi_1 - \phi_2)\|_0.$$

Le second terme est majoré grâce aux estimations du **lemme 3.1**. On a alors :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|Y_1 - Y_2\|_0^2 \leq \|Y_1 - Y_2\|_0^2 \left[\frac{\|\Delta\phi_1\|_\infty}{2} + \|\nabla Y_2\|_\infty \cdot C_{PW} \cdot |\psi(t)| \right].$$

Le lemme de *Grönwall* permet de conclure grâce à la condition initiale $(Y_1 - Y_2)(0, \cdot) = 0$.

D'où le principe d'unicité des solutions dans $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}(\Omega)$. ■

Principe du maximum

Dans la démonstration du point 3 du **lemme 2.12**, on remarque que les seules conditions requises pour que les calculs soient valides sont la différentiabilité en espace-temps de la solution et le fait que le champ de vitesse ait une divergence dans $L^1([0, \mathcal{T}], L^\infty(\Omega))$. Comme on l'a vu précédemment, ces conditions sont satisfaites dans le cadre $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}(\Omega)$. On en déduit donc le résultat suivant.

Lemme 3.5

Soit Y une solution de (3.1) dans $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}(\Omega)$. Si $Y_0(x) \in [a, b]$ pour presque tout $x \in \Omega$, alors $Y(t, x) \in [a, b]$ pour presque tout t et x .

Réversibilité

La définition de la réversibilité adaptée au système (3.8) se formule ainsi : soit $Y \in \mathcal{Z}_{\mathcal{T}}(\Omega)$ une solution de $\text{ABV}[Y_0, \psi, \Omega]$ pour un certain temps $\mathcal{T} > 0$, avec $Y_0 \in W^{1,\infty}(\Omega)$ et $Y(\mathcal{T}, \cdot) \in W^{1,\infty}(\Omega)$.⁴ Partant de $Y(\mathcal{T}, \cdot)$, on cherche à savoir si l'on retrouve la donnée Y_0 au temps \mathcal{T} au moyen de la transformation $t \mapsto \mathcal{T} - t$.

On considère donc le problème $\text{ABV}[Y(\mathcal{T}, \cdot), \hat{\psi}, \Omega]$ pour $\hat{\psi}(t) = -\psi(\mathcal{T} - t)$. Si l'on note $\hat{Y}(t, x) = Y(\mathcal{T} - t, x)$ et $\hat{\phi}(t, x) = -\phi(\mathcal{T} - t, x)$, on vérifie que $(\hat{Y}, \hat{\phi})$ est bien solution de $\text{ABV}[Y(\mathcal{T}, \cdot), \hat{\psi}, \Omega]$. Comme $\hat{Y} \in \mathcal{Z}_{\mathcal{T}}(\Omega)$, par le **lemme 3.4**, $(\hat{Y}, \hat{\phi})$ est l'unique solution et on a bien $\hat{Y}(\mathcal{T}, x) = Y_0(x)$.

Lemme 3.6

Le modèle ABV est réversible dans $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}(\Omega)$.

Parité

Le dernier résultat de ce paragraphe concerne le cas des données symétriques. On suppose dans ce paragraphe uniquement que le domaine Ω est symétrique au sens où :

- $x \in \Omega \implies (-x) \in \Omega$;
- $\forall x \in \partial\Omega, \nu(-x) = -\nu(x)$.

⁴ On sait que si $Y \in \mathcal{Z}_{\mathcal{T}}(\Omega)$, alors, d'après (3.8a), Y appartient à l'espace $\mathcal{C}^0([0, \mathcal{T}], L^2(\Omega))$. On peut définir $Y(\mathcal{T}, \cdot)$ dans L^2 mais *a priori* pas dans $W^{1,\infty}$. C'est pourquoi cela constitue une hypothèse ici.

Lemme 3.7

Si la donnée $Y_0 \in W^{1,\infty}(\Omega)$ est paire dans le domaine Ω symétrique, alors toute solution de (3.1) dans $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}(\Omega)$ est paire.

Démonstration : On considère une solution (Y, ϕ) de $\text{ABV}[Y_0, \psi, \Omega]$. Le raisonnement est basé sur l'unicité de la solution. On pose alors $\tilde{Y}(t, \mathbf{x}) = Y(t, -\mathbf{x})$ et $\tilde{\phi}(t, \mathbf{x}) = \phi(t, -\mathbf{x})$. On vérifie que $(\tilde{Y}, \tilde{\phi})$ est solution de $\text{ABV}[Y_0, \psi, \Omega]$, car $\tilde{Y}(0, \mathbf{x}) = Y_0(-\mathbf{x}) = Y_0(\mathbf{x})$, $\nabla \tilde{\phi} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) = -\nabla \phi(t, -\mathbf{x}) \cdot [-\mathbf{v}(-\mathbf{x})] = 0$ et :

$$\int_{\Omega} Y(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} Y(t, -\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \tilde{Y}(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Par unicité (**lemme 3.4**), on a $Y(t, \mathbf{x}) = \tilde{Y}(t, \mathbf{x}) = Y(t, -\mathbf{x})$ et Y est paire. De même, le champ de vitesse $\nabla \phi$ est impair. ■

3.1.7 Moyenne des solutions bornées

On a étudié dans les paragraphes précédents des données initiales de type Sobolev H^s ou $W^{1,\infty}$. Si l'on se replace dans le contexte de la modélisation des bulles, Y représente la fraction massique de la phase vapeur et prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$. Plus précisément, si l'on introduit le domaine $\Omega_1(t)$ occupé par la bulle, on recherche des solutions du type $Y(t, \mathbf{x}) = \mathbf{1}_{\Omega_1(t)}(\mathbf{x})$. On est donc amené à introduire une nouvelle notion, à savoir la notion de solutions faibles, dans le cas où la donnée Y_0 est seulement bornée. Pour cela, on reformule le modèle comme suit :

$$(3.9) \quad \begin{cases} \partial_t Y + \nabla \cdot (Y \nabla \phi) = \psi(t) Y \left(Y - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y(t, \mathbf{x}') \, d\mathbf{x}' \right), & (3.9a) \\ Y(t = 0, \cdot) = Y_0, & (3.9b) \\ \Delta \phi(t, \mathbf{x}) = \psi(t) \left(Y(t, \mathbf{x}) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y(t, \mathbf{x}') \, d\mathbf{x}' \right), & (3.9c) \\ \nabla \phi \cdot \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0, & (3.9d) \end{cases}$$

pour $Y_0 \in L^\infty(\Omega)$.

On appelle ainsi **solution faible du système** (3.9) sur l'intervalle $[0, \mathcal{T}]$ toute fonction $Y \in L^\infty([0, \mathcal{T}] \times \Omega)$ vérifiant, pour toute fonction⁵ $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty([0, \mathcal{T}] \times \overline{\Omega})$, l'égalité :

$$\iint_{\Omega_{\mathcal{T}}} Y(t, \mathbf{x}) \{ \partial_t \varphi(t, \mathbf{x}) + \nabla \phi(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla \varphi(t, \mathbf{x}) + \psi(t) \varphi(t, \mathbf{x}) [Y(t, \mathbf{x}) - \mu(Y(t, \cdot))] \} \, dx dt + \int_{\Omega} Y_0(\mathbf{x}) \varphi(0, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0, \quad (3.10)$$

où $\Omega_{\mathcal{T}} = [0, \mathcal{T}] \times \Omega$. L'EDP (3.9c) est quant à elle à prendre au sens usuel, comme évoqué dans le paragraphe précédent. La mise sous forme conservative (3.9) est le cadre naturel pour définir des formulations faibles.

⁵ $\varphi \in \mathcal{C}_0^1([0, \mathcal{T}] \times \overline{\Omega})$ suffit pour légitimer les calculs, mais on conserve le cadre fort des fonctions \mathcal{C}^∞ à support compact.

L'objectif de ce paragraphe est de déterminer une expression explicite des quantités $\mu_n(t)$ définies par :

$$\mu_n(t) := \mu(Y^n(t, \cdot)) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y^n(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

pour toute solution faible Y du système (3.9).

Mais débutons par une remarque sur la suite (μ_n) dans le cas de données initiales pour lesquelles on dispose du principe du maximum, *i.e.* pour lesquelles on a l'existence d'une solution bornée à valeurs dans $[0, 1]$, ce qui est par exemple le cas lorsque $Y_0 \in \mathcal{H}^{s_0+1}(\Omega)$ à valeurs dans $[0, 1]$ (cf. **théorème 3.1** et **lemme 3.5**). Par le théorème de convergence monotone, la suite (μ_n) décroît et converge pour presque tout t vers la fonction :

$$\mu_{\infty}(t) = \frac{|\Omega_1(t)|}{|\Omega|}, \text{ où } \Omega_1(t) = \{\mathbf{x} \in \Omega : Y(t, \mathbf{x}) = 1\}.$$

Dans le cas général où $Y_0 \in L^{\infty}(\Omega)$ à valeurs dans $[0, 1]$, on n'a pas de principe du maximum *a priori*, ni même d'existence de solutions, et on ne peut conclure sur le comportement de la suite. On va cependant établir au **lemme 3.9** que l'on peut étendre le principe du maximum aux solutions faibles.

Supposons qu'il existe au moins une solution faible $Y \in L^{\infty}([0, \mathcal{T}] \times \Omega)$ de $\text{ABV}[Y_0, \psi, \Omega]$. Alors, les termes de la suite (μ_n) sont solutions d'équations différentielles ordinaires couplées.

Lemme 3.8

Les termes de la suite $(\mu_n)_n$ sont de classe \mathcal{C}^1 et satisfont les équations :

$$\mu'_n(t) = \psi(t)(\mu_{n+1}(t) - \mu_1(t)\mu_n(t)). \tag{3.11}$$

Démonstration : Par le principe de renormalisation [30], Y_1^n vérifie l'équation de transport avec champ de vitesse $\nabla\phi$ et condition initiale $(Y_0)^n$, ce qui se traduit par l'égalité (3.10) en remplaçant le facteur Y de l'accolade par Y^n et Y_0 par $(Y_0)^n$. Si l'on prend $\varphi(t, \mathbf{x}) = \theta(t)\xi_p(\mathbf{x})$ avec $\theta \in \mathcal{C}_0^{\infty}([0, \mathcal{T}])$ et $(\xi_p)_p$ une suite de $\mathcal{C}_0^{\infty}(\Omega)$ qui converge simplement vers $\mathbf{1}_{\Omega}$, on obtient :

$$\int_0^{\mathcal{T}} \theta'(t) \int_{\Omega} \xi_p(\mathbf{x}) Y^n(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} dt + \int_0^{\mathcal{T}} \theta(t) \int_{\Omega} Y^n(t, \mathbf{x}) \nabla\phi(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla\xi_p(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} dt + \int_0^{\mathcal{T}} \psi(t)\theta(t) \int_{\Omega} \xi_p(\mathbf{x}) Y^n(t, \mathbf{x}) [Y(t, \mathbf{x}) - \mu_1(t)] \, d\mathbf{x} dt + \theta(0) \int_{\Omega} (Y_0)^n(\mathbf{x}) \xi_p(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

Après passage à la limite pour $p \rightarrow +\infty$, par application du théorème de convergence dominée, il reste (après division par $|\Omega|$) :

$$\int_0^{\mathcal{T}} \theta'(t) \mu_n(t) \, dt + \int_0^{\mathcal{T}} \psi(t)\theta(t) (\mu_{n+1}(t) - \mu_1(t)\mu_n(t)) \, dt + \theta(0) \mu((Y_0)^n) = 0.$$

Cette égalité est l'écriture **au sens des distributions** de l'EDO (3.11). Avec $Y \in L^{\infty}([0, \mathcal{T}] \times \Omega)$, μ_n est une fonction bornée du temps pour tout n . Le second membre de l'EDO (3.11) est donc borné. D'après [11, § II.4], la fonction μ_n est continue et dérivable presque partout. De fait, le second membre de (3.11) est désormais continu, ce qui justifie que μ_n est solution de l'EDO (3.11) au sens classique. ■

Remarque 7 – On constate en premier lieu que μ_n a une régularité en temps supérieure à celle supposée de Y : on s’est placé ici sous l’hypothèse que la solution Y est seulement bornée en temps, alors que sa moyenne est nécessairement continûment dérivable. Cela laisse à penser que le système tend à régulariser (en temps) la solution.

Par ailleurs, pour le cas $n = 1$, l’équation $\mu'_1 = \psi(\mu_2 - \mu_1^2)$ est une équation de *Riccati* pour l’inconnue μ_1 et fournit le sens de variations de μ_1 . En effet, par l’inégalité de *Jensen*, le terme $\mu_2 - \mu_1^2$ est positif. On en déduit que le signe de μ'_1 est celui de ψ , ce qui montre que **la monotonie de la moyenne des solutions est régie par le signe de la pulsation**. Pour les cas $n > 1$, l’EDO (3.11) est linéaire par rapport à μ_n (mais dépend de μ_{n+1}). \diamond

Bien qu’elles forment un système infini d’EDOs couplées, les équations (3.11) peuvent être résolues, le résultat étant donné dans le théorème suivant.

Théorème 3.3

Soit $Y_0 \in L^\infty(\Omega)$. Pour ψ continue sur $[0, +\infty[$, on note Ψ la primitive de ψ qui s’annule en 0. Si Y est une solution faible bornée de $\text{ABV}[Y_0, \psi, \Omega]$, alors :

$$\mu_n(t) := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y^n(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \frac{\int_{\Omega} [Y_0(\mathbf{x})]^n \exp[\Psi(t)Y_0(\mathbf{x})] \, d\mathbf{x}}{\int_{\Omega} \exp[\Psi(t)Y_0(\mathbf{x})] \, d\mathbf{x}}. \quad (3.12)$$

Démonstration : Notons \mathfrak{M} un majorant de Y_0 . On récrit tout d’abord l’équation (3.11) sous la forme d’une relation de récurrence intégrale. Comme le terme $\mu'_n + \psi\mu_1\mu_n (= \psi\mu_{n+1})$ peut s’exprimer sous la forme :

$$\left[\mu_n(t) \exp \int_0^t \mu_1(\tau)\psi(\tau) \, d\tau \right]' \exp \left(- \int_0^t \mu_1(\tau)\psi(\tau) \, d\tau \right),$$

on obtient la forme intégrale, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$M_N(t) = \mu_N(0) + \int_0^t \psi(\tau)M_{N+1}(\tau) \, d\tau, \quad (\text{Th.3.3.i})$$

avec $M_N(t) := \mu_N(t) \exp \left(\int_0^t \psi(\tau)\mu_1(\tau) \, d\tau \right)$. Montrons alors la formule suivante **par récurrence** :

$$M_1(t) = \sum_{k=1}^N \mu_k(0) \frac{\Psi(t)^{k-1}}{(k-1)!} + \int_0^t \psi(\tau)M_{N+1}(\tau) \frac{[\Psi(t) - \Psi(\tau)]^{N-1}}{(N-1)!} \, d\tau. \quad (\text{Th.3.3.ii})$$

Le cas $N = 1$ correspond à l’égalité (Th.3.3.i). Pour $N \geq 1$, on a, en utilisant (Th.3.3.i) au rang $N + 1$:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^t \psi(\tau) M_{N+1}(\tau) \frac{[\Psi(t) - \Psi(\tau)]^{N-1}}{(N-1)!} d\tau \\
 &= \int_0^t \left[\mu_{N+1}(0) + \int_0^\tau \psi(\tau') M_{N+2}(\tau') d\tau' \right] \psi(\tau) \frac{[\Psi(t) - \Psi(\tau)]^{N-1}}{(N-1)!} d\tau \\
 &= \mu_{N+1}(0) \frac{\Psi(t)^N}{N!} + \int_0^t \int_0^\tau \left[\psi(\tau) \frac{[\Psi(t) - \Psi(\tau)]^{N-1}}{(N-1)!} \right] \cdot [\psi(\tau') M_{N+2}(\tau')] d\tau' d\tau \\
 &= \mu_{N+1}(0) \frac{\Psi(t)^N}{N!} + \int_0^t \psi(\tau') M_{N+2}(\tau') \left[\int_{\tau'}^t \psi(\tau) \frac{[\Psi(t) - \Psi(\tau)]^{N-1}}{(N-1)!} d\tau \right] d\tau'
 \end{aligned}$$

(d'après le théorème de Fubini)

$$= \mu_{N+1}(0) \frac{\Psi(t)^N}{N!} + \int_0^t \psi(\tau') M_{N+2}(\tau') \frac{[\Psi(t) - \Psi(\tau')]^N}{N!} d\tau'.$$

En additionnant ce résultat à (Th.3.3.ii), on obtient la formule souhaitée au rang $N + 1$.

Afin de déterminer une expression de M_1 , on souhaite passer à la limite dans (Th.3.3.ii). Justifions en premier lieu la convergence de la série, en notant que la fonction Ψ est continue. De plus :

$$\left| \mu_{k+1}(0) \frac{\Psi^k(t)}{k!} \right| \leq \mathfrak{Y} \frac{[\mathfrak{Y}|\Psi(t)|]^k}{k!},$$

terme général d'une série exponentielle convergente sur tout compact (Ψ y est bornée). On en déduit que la série $\sum_k \mu_{k+1}(0) \Psi^k(t)/k!$ est normalement convergente sur tout compact. Quant au terme intégral dans (Th.3.3.ii), en explicitant M_{N+1} et μ_{N+1} , il s'écrit :

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_0^t \int_\Omega \psi(\tau) \frac{[Y(\tau, \mathbf{x})(\Psi(t) - \Psi(\tau))]^N}{N!} Y(\tau, \mathbf{x}) \exp\left(\int_0^\tau \psi(\sigma) \mu_1(\sigma) d\sigma\right) dx d\tau.$$

La fraction tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$. Comme les autres termes sont bornés, on en déduit, *via* le théorème de convergence dominée, que l'intégrale tend vers 0. D'où, après passage à la limite, il vient :

$$\mu_1(t) \exp\left(\int_0^t \psi(\tau) \mu_1(\tau) d\tau\right) = M_1(t) = \sum_{k \geq 1} \mu_k(0) \frac{\Psi(t)^{k-1}}{(k-1)!}. \quad (\text{Th.3.3.iii})$$

En multipliant par ψ et en intégrant cette dernière égalité, on obtient :

$$\exp\left(\int_0^t \psi(\tau) \mu_1(\tau) d\tau\right) = 1 + \sum_{k \geq 1} \mu_k(0) \frac{\Psi(t)^k}{k!} = \sum_{k \geq 0} \mu_k(0) \frac{\Psi(t)^k}{k!}. \quad (\text{Th.3.3.iv})$$

En divisant (Th.3.3.iii) par le terme strictement positif (Th.3.3.iv), il vient :

$$\mu_1(t) = \frac{\sum_{k \geq 1} \mu_k(0) \frac{\Psi(t)^{k-1}}{(k-1)!}}{\sum_{k \geq 0} \mu_k(0) \frac{\Psi(t)^k}{k!}}.$$

On remarque enfin que les séries intervenant dans ce résultat sont des sommes d'intégrales. En effet :

$$\sum_{k \geq 0} \mu_k(0) \frac{\Psi(t)^k}{k!} = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{k \geq 0} \int_\Omega \frac{[\Psi(t) Y_0(\mathbf{x})]^k}{k!} dx.$$

Comme la série exponentielle $\sum_k [\Psi(t)Y_0(x)]^k/k!$ est normalement convergente, on peut permuter les symboles somme et intégrale, ce qui donne :

$$\sum_{k \geq 0} \mu_k(0) \frac{\Psi(t)^k}{k!} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \exp[\Psi(t)Y_0(x)] dx.$$

On raisonne de manière analogue pour le numérateur, pour finalement parvenir à la formule souhaitée :

$$\mu_1(t) = \frac{\int_{\Omega} Y_0(x) \exp[\Psi(t)Y_0(x)] dx}{\int_{\Omega} \exp[\Psi(t)Y_0(x)] dx}. \quad (\text{Th.3.3.v})$$

Pour démontrer la formule (3.12) dans le cas général pour n quelconque, on raisonne par récurrence. Pour $n = 2$, on dérive les deux expressions de M_1 dans (Th.3.3.iii) :⁶

$$M_1'(t) = (\mu_1'(t) + \psi(t)\mu_1^2(t)) \exp\left(\int_0^t \psi(\tau)\mu_1(\tau) d\tau\right) = \psi(t) \sum_{k \geq 2} \mu_k(0) \frac{\Psi(t)^{k-2}}{(k-2)!}.$$

Or, $\mu_1'(t) + \psi(t)\mu_1^2(t) = \psi(t)\mu_2(t)$ d'après (3.11). D'où :

$$M_1'(t) = \psi(t)M_2(t) = \psi(t) \sum_{k \geq 2} \mu_k(0) \frac{\Psi(t)^{k-2}}{(k-2)!}.$$

On distingue deux cas. Si $\psi(t_0) \neq 0$, on simplifie par $\psi(t_0)$ dans l'égalité ci-dessus, puis on utilise les mêmes arguments que précédemment, à savoir une interversion somme/intégrale et une division par (Th.3.3.iv) pour obtenir (3.12) pour $n = 2$:

$$\mu_2(t_0) = \frac{\int_{\Omega} [Y_0(x)]^2 \exp[\Psi(t_0)Y_0(x)] dx}{\int_{\Omega} \exp[\Psi(t_0)Y_0(x)] dx}. \quad (\text{Th.3.3.vi})$$

Si $\psi(t_0) = 0$ et si ψ ne s'annule qu'en t_0 dans son voisinage, on prolonge par continuité la fonction μ_2 , la fonction de droite dans (Th.3.3.vi) étant de classe \mathcal{C}^1 . Si ψ s'annule sur un intervalle $[a, b]$ contenant t_0 , alors $\mu_2'(t) = 0$ sur cet intervalle d'après (3.11), et $\mu_2(t) = \mu_2(a)$, ce qui est cohérent avec (Th.3.3.vi) puisque $\Psi(t) = \Psi(a)$ sur $[a, b]$.

On montre de même, à partir de $M_n'(t) = \psi(t)M_{n+1}$, la formule (3.12). ■

On notera au passage la formule déduite de (Th.3.3.iv) :

$$\exp\left(\int_0^t \psi(\tau)\mu_1(\tau) d\tau\right) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \exp[\Psi(t)Y_0(x)] dx. \quad (3.13)$$

Ce résultat appelle un certain nombre de remarques :

- On a obtenu une formule explicite (en fonction des données Y_0 , ψ et Ω) pour la variable $\mu_1 = \mu(Y)$, quelle que soit la solution faible Y au modèle ABV. En particulier, cela fournit la moyenne de l'unique solution dans le cas régulier (**théorème 3.1**).
- De plus, le second membre de (3.12) est **défini pour tout temps**, du fait de la continuité sur \mathbb{R}_+ de la fonction ψ . Cela laisse penser que la variable μ_n est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$, quelle que soit la régularité de la donnée initiale (et donc de la solution) : on ne voit pas apparaître de singularité en temps fini.

⁶ La série dans le membre de droite de (Th.3.3.iii) est normalement convergente. De plus, son terme général est de classe \mathcal{C}^1 par rapport à t . On en déduit que la série est dérivable.

- Outre l'influence⁷ de ψ sur les variations de μ_1 , on remarque que **si Ψ est périodique** (i.e. si ψ est périodique et d'intégrale nulle sur une période), **alors μ_1 est périodique de même période**.⁸ Cela soulève la question de la périodicité des solutions Y elles-mêmes, ce qui reste un problème ouvert. On verra que c'est effectivement le cas en dimension 1.
- Par ailleurs, cette formule est cohérente avec les trois cas triviaux évoqués dans la remarque 5, p. 77, à la suite du **théorème 3.1**. Si $Y_0 = 1$ (resp. $Y_0 = 0$), alors $\mu_1 \equiv 1$ (resp. $Y_0 = 0$). De même, si $\psi \equiv 0$, alors $\Psi \equiv 0$ et $\mu_1(t) = \mu_1(0)$.
- La formule (Th.3.3.vi) achève la preuve du caractère bien posé dans $\mathcal{W}_{s,\mathcal{T}}(\Omega)$, puisqu'elle fournit une majoration de la solution par la donnée initiale (on utilise le fait que $-|\Psi(t)| \cdot \|Y_0\|_\infty \leq \Psi(t)Y_0(x) \leq |\Psi(t)| \cdot \|Y_0\|_\infty$) :

$$\|Y(t, \cdot)\|_0 = \sqrt{|\Omega| \cdot \mu_2(t)} \leq \sqrt{|\Omega|} e^{|\Psi(t)| \cdot \|Y_0\|_\infty} \|Y_0\|_0.$$

- Si l'on revient à l'étude préliminaire de la suite (μ_n) , on parvient à la même conclusion que dans le cas où Y_0 est à valeurs dans $[0, 1]$ et où on dispose d'un principe du maximum : la suite (μ_n) converge. Le théorème de convergence monotone assure en effet la décroissance de la suite donnée par (3.12), avec pour limite :

$$\frac{|\Omega_1(0)| \exp \Psi(t)}{|\Omega_1(0)| \exp \Psi(t) + \int_{\Omega \setminus \Omega_1(0)} \exp[\Psi(t)Y_0(x)] dx}.$$

On ne peut toutefois pas affirmer que ce terme est égal à $|\Omega_1(t)|/|\Omega|$, du fait que l'on ne dispose d'aucune information sur le caractère borné ou non de Y .

- La moyenne étant explicitée, on peut reformuler le modèle sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \partial_t Y + \nabla \phi \cdot \nabla Y = 0, \\ Y(0, \cdot) = Y_0, \\ \Delta \phi - \psi(t)Y = -\psi(t)\mu_1(t), \\ \nabla \phi \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

la fonction μ_1 étant donnée par (Th.3.3.v). Le second membre étant connu, **on obtient un système purement différentiel** et non plus intégral-différentiel. L'information $\mu_\Omega(Y) = \mu_1$ se retrouve aisément par intégration de l'équation elliptique lorsque $\psi(t) \neq 0$ (on prolonge par continuité sinon).

Une autre conséquence du **théorème 3.3** est une preuve d'un principe du maximum pour des solutions faibles.

Lemme 3.9

Soit $Y \in L^\infty([0, \mathcal{T}] \times \Omega)$ une solution faible du modèle ABV pour un certain $\mathcal{T} > 0$. Si $Y_0 \in L^\infty(\Omega)$ est à valeurs dans $[a, b]$ pour presque tout $x \in \Omega$, alors $Y(t, \cdot) \in [a, b]$ presque partout.

⁷ À noter que la donnée ψ n'intervient pas directement dans l'expression de la variable μ_1 , mais par le biais de sa primitive.

⁸ Ceci est en partie à l'origine de la dénomination de « pulsation » pour ψ .

Démonstration : Commençons par le cas $Y_0 \in [0, 1]$. Comme énoncé dans les remarques, la suite (μ_n) converge, du fait que $Y_0 \in [0, 1]$. Or, par définition :

$$\mu_n(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y^n(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Montrons que la fonction Y ne peut pas prendre de valeurs hors de $[0, 1]$ (à un ensemble de mesure nulle près). Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $\omega(t) \subset \Omega$ de mesure non nulle sur lequel $Y(t, \mathbf{x}) > 1$. Alors :

$$\mu_{2n}(t) = \underbrace{\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega \setminus \omega(t)} Y^{2n}(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x}}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{1}{|\Omega|} \int_{\omega(t)} Y^{2n}(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty}.$$

Ceci montre que la suite (μ_n) diverge, ce qui est absurde. D'où, $Y \leq 1$ presque partout. De même, on considère la solution $Z = 1 - Y$ associée à la condition initiale $Z^0 = 1 - Y_0 \leq 1$. De ce qui précède, on déduit que $Z \leq 1$, d'où $Y \geq 0$ presque partout.

Dans le cas général où $Y_0 \in [a, b]$, on considère une solution faible Y de ABV $[Y_0, \psi, \Omega]$. La variable $Z = \frac{Y - a}{b - a}$ est donc une solution faible de ABV $[Z^0, (b - a)\psi, \Omega]$, avec $Z^0 = \frac{Y_0 - a}{b - a} \in [0, 1]$. En appliquant ce que l'on vient de prouver dans le cas $[0, 1]$, on déduit que Z est à valeurs dans $[0, 1]$ presque partout, et donc que Y est à valeurs dans $[a, b]$. ■

Le **lemme 3.9** est ainsi une généralisation au cas L^∞ du **lemme 3.5** qui s'appliquait au cas des solutions dans $\mathcal{Z}_{\mathcal{G}}(\Omega)$.

Par ailleurs, ce principe du maximum rend plausible la possibilité d'avoir des solutions faibles de type « bulles », *i.e.* des fonctions caractéristiques de sous-domaines de Ω . Le résultat suivant traite de ce type de solutions (sous l'hypothèse qu'il en existe) et a été prouvé initialement dans [27]. On donne ici une autre preuve de la formule (3.14), qui est une conséquence du **théorème 3.3**.

Lemme 3.10 (Lemme 1.1, [27])

On suppose qu'il existe un domaine mobile $\Omega_1(t)$ tel que sa fonction caractéristique $Y(t, \mathbf{x}) = \mathbf{1}_{\Omega_1(t)}(\mathbf{x})$ soit solution du système (3.9) muni de la condition initiale $Y_0(\mathbf{x}) = \mathbf{1}_{\Omega_1^0}(\mathbf{x})$, avec $\Omega_1(0) = \Omega_1^0 \subset \Omega$ donné. Alors $V(t) = \frac{|\Omega_1(t)|}{|\Omega|}$ est solution de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} V'(t) = \psi(t)V(t)(1 - V(t)), \\ V(0) = \frac{|\Omega_1^0|}{|\Omega|}. \end{cases}$$

La solution forte de ce système est donnée par la formule :

$$\boxed{|\Omega_1(t)| = |\Omega| \frac{|\Omega_1(0)| \exp \int_0^t \psi(\tau) \, d\tau}{|\Omega| - |\Omega_1(0)| + |\Omega_1(0)| \exp \int_0^t \psi(\tau) \, d\tau}}. \quad (3.14)$$

Démonstration : Supposons que la fonction $Y(t, \mathbf{x}) = \mathbf{1}_{\Omega_1(t)} \in L^\infty([0, +\infty[\times \Omega)$ soit une solution faible du modèle ABV. Par définition, on a :

$$\mu_1(t) = \frac{|\Omega_1(t)|}{|\Omega|} = V(t),$$

puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mu_n(t) = \mu_1(t) = V(t)$, ce qui justifie le caractère \mathcal{C}^1 de V . Les EDOs (3.11) dont les moyennes μ_n sont solutions se réduisent dans ce cas à l'unique EDO :

$$V'(t) = \psi(t)V(t)(1 - V(t)),$$

avec $V(0) \in [0, 1]$. Les solutions triviales 0 et 1 correspondent aux cas où $\Omega_1^0 = \emptyset$ et $\Omega_1^0 = \Omega$. Dans les autres cas initiaux, on a $V(t) \in]0, 1[$ d'après le théorème de *Cauchy-Lipschitz*. On peut ensuite en déduire l'expression de la solution en écrivant l'EDO sous forme séparée.

La formule (3.14) se déduit aussi directement de (Th.3.3.v) par le calcul :

$$\int_{\Omega} \exp[\Psi(t)Y_0(\mathbf{x})] \, d\mathbf{x} = |\Omega_1^0| \exp \Psi(t) + |\Omega| - |\Omega_1^0|. \quad \blacksquare$$

Dans le cas des solutions de la forme $\mathbf{1}_{\Omega_1(t)}(\mathbf{x})$, la variable $\mu_1(t)$ représente le volume relatif de la bulle, le volume global étant donné par :

$$|\Omega_1(t)| = \frac{1}{\left(\frac{1}{|\Omega_1(0)|} - \frac{1}{|\Omega|}\right) \exp\left[-\int_0^t \psi(\tau) \, d\tau\right] + \frac{1}{|\Omega|}}.$$

On retrouve les remarques précédentes sur l'influence de la pulsation : monotonie du volume en fonction du signe de ψ et périodicité éventuelle. De plus, si $\Psi(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$, alors $|\Omega_1(t)| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} |\Omega|$: si la bulle subit l'effet d'une pulsation qui explose, alors elle tend à occuper tout le domaine.

On remarque également que **le volume de la bulle dépend de la taille du domaine**. L'équation d'advection seule aurait été en contradiction avec ce constat, mais il s'explique par l'influence de l'équation de Poisson, dont l'effet est global et immédiat. Ainsi, une même bulle dans deux enceintes de tailles différentes aura des comportements distincts. Asymptotiquement parlant, si le domaine est très grand (assimilé à un domaine infini) avec de petites bulles à l'échelle du domaine, ce que l'on traduit par $|\Omega| \gg 1$ et $|\Omega| \gg |\Omega_1(0)|$, on a $|\Omega_1(t)| \sim |\Omega_1(0)| \exp \int_0^t \psi(\tau) \, d\tau$.

On peut démontrer d'autres formules algébriques vérifiées par les solutions du modèle ABV. Par exemple, on a :

$$\exp\left(-\int_0^t \psi(\tau)\mu_1(\tau) \, d\tau\right) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \exp[-\Psi(t)Y(t, \mathbf{x})] \, d\mathbf{x}, \quad (3.15)$$

soit encore :

$$1 = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \exp\left[-\int_0^t \psi(\tau)[Y(t, \mathbf{x}) - \mu_1(\tau)] \, d\tau\right] \, d\mathbf{x},$$

à comparer avec (Th.3.3.iv) :

$$\exp\left(\int_0^t \psi(\tau)\mu_1(\tau) d\tau\right) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \exp[\Psi(t)Y_0(x)] dx.$$

En effet, en introduisant la fonction $\Phi(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\Psi(t)^n}{n!} \mu_n(t)$, on a :

$$\exp\left(-\int_0^t \psi(\tau)\mu_1(\tau) d\tau\right) = 1 - \Phi(t). \quad (3.16)$$

Cette relation découle de la formule suivante, vraie pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \int_0^t \psi(\tau)\mu_1(\tau) d\tau &= \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} \frac{\Psi(t)^n}{n!} \mu_n(t) \\ &+ \int_0^t \psi(\tau)\mu_1(\tau) \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} \frac{\Psi(\tau)^n}{n!} \mu_n(\tau) d\tau + (-1)^N \int_0^t \frac{\Psi(\tau)^N}{N!} \psi(\tau)\mu_{N+1}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Par passage à la limite, il vient :

$$\int_0^t \psi(\tau)\mu_1(\tau) d\tau = \Phi(t) + \int_0^t \psi(\tau)\mu_1(\tau)\Phi(\tau) d\tau.$$

D'où $1 - \Phi$ est solution de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} (1 - \Phi)' = -\psi\mu_1(1 - \Phi), \\ (1 - \Phi)(0) = 1. \end{cases}$$

On en déduit la relation (3.16). Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Psi(t)^n}{n!} \frac{(-1)^{n+1}}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y^n(t, x) dx = 1 - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\Psi(t)^n Y^n(t, x)}{n!} dx \\ &= 1 - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \exp(-\Psi(t)Y(t, x)) dx. \end{aligned}$$

On conclut à (3.15). À noter que, bien que cette formule n'ait pas d'application directe, elle est à l'origine des travaux effectués sur la moyenne des solutions et qui ont débouché sur le **théorème 3.3** et sur le **lemme 3.9**.

3.2 MODÈLE ABSTRAIT DE VIBRATION DE BULLE EN DIMENSION 1

On a énoncé dans les paragraphes précédents des résultats valables en dimension quelconque. Il reste toutefois un certain nombre de problèmes ouverts, comme la question de l'existence de solutions faibles ou encore la détermination de solutions explicites. Dans cette partie, on répond à ces questions pour le cas particulier de la dimension 1, dimension dans laquelle on peut simplifier certaines équations afin de pouvoir aller plus loin que dans les études précédentes.

3.2.1 Reformulations du modèle

On se place dans le domaine symétrique $\Omega = [-L, L]$. Le système (3.1) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \partial_t Y + \partial_x \phi \partial_x Y = 0, \\ Y(t = 0, \cdot) = Y^0, \\ \partial_{xx}^2 \phi = \psi(t) \left(Y - \frac{1}{2L} \int_{-L}^L Y(t, x') dx' \right), \\ \partial_x \phi(t, -L) = \partial_x \phi(t, L) = 0. \end{cases}$$

En dimension 1, l'existence de ϕ tel que $u = \partial_x \phi$ est immédiate, ce qui n'est pas le cas en dimension supérieure. Le système précédent est donc rigoureusement équivalent au suivant :

$$\begin{cases} \partial_t Y + u \partial_x Y = 0, \\ Y(t = 0, \cdot) = Y^0, \\ \partial_x u = \psi(t) \left(Y - \frac{1}{2L} \int_{-L}^L Y(t, x') dx' \right), \\ u(t, -L) = u(t, L) = 0. \end{cases}$$

L'équation sur u s'intégrant directement, le système peut encore s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \partial_t Y + u \partial_x Y = 0, \\ Y(t = 0, \cdot) = Y^0, \\ u(t, x) = \psi(t) \left(\int_{-L}^x Y(t, x') dx' - \frac{x+L}{2L} \int_{-L}^L Y(t, x') dx' \right), \end{cases} \quad (3.17)$$

ou plus simplement comme une équation intégro-différentielle non-linéaire :

$$\partial_t Y(t, x) + \psi(t) \left(\int_{-L}^x Y(t, y) dy - \frac{x+L}{2L} \int_{-L}^L Y(t, y) dy \right) \partial_x Y(t, x) = 0.$$

Si l'on introduit la variable $R(t, x) = \int_{-L}^x (Y(t, x') - \mu_1(t)) dx'$, la variable μ_1 étant connue indépendamment de Y par le **théorème 3.3**, le système peut se reformuler en une unique équation aux dérivées partielles non linéaire :

$$\partial_{tx}^2 R(t, x) + \psi(t) R(t, x) \partial_{xx}^2 R = -\mu_1'(t),$$

avec les conditions aux limites $R(t, L) = R(t, -L) = 0$. Cependant, c'est la forme (3.17) que l'on utilisera dans la suite.

3.2.2 Évolution d'une bulle dans un domaine borné

Ce travail s'inspire de calculs effectués initialement par Pascal OMNES. On détermine dans ce paragraphe une solution faible explicite et globale en temps pour le système (3.17) dans le cas de données de type « bulles », *i.e.* de fonctions indicatrices. La preuve repose sur

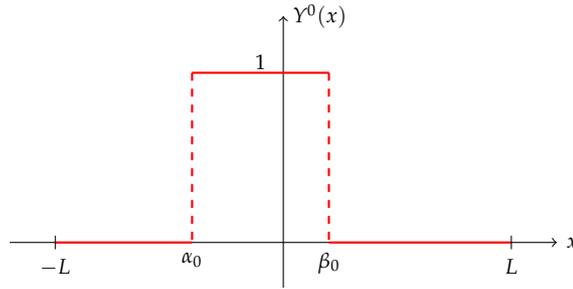


FIG. 3.2 – Un exemple de donnée initiale irrégulière

la relation de *Rankine et Hugoniot* pour les solutions faibles discontinues de l'équation de transport. Plus précisément, on associe au système (3.17) la condition initiale (cf. FIG. 3.2) :

$$Y(0, x) = Y^0(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha_0 \leq x \leq \beta_0, \\ 0, & \text{si } -L \leq x < \alpha_0 \text{ ou } \beta_0 < x \leq L. \end{cases} \quad (3.18)$$

Proposition 3.1

Une solution du système (3.17) muni de la condition initiale (3.18) est donnée par $Y(t, x) = \mathbf{1}_{[\alpha(t), \beta(t)]}(x)$, avec :

$$\alpha(t) = \frac{\frac{\alpha_0 + \beta_0}{2} - \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2} \exp \Psi(t)}{1 - \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2L} + \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2L} \exp \Psi(t)}, \quad (3.19a)$$

et :

$$\beta(t) = \frac{\frac{\alpha_0 + \beta_0}{2} + \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2} \exp \Psi(t)}{1 - \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2L} + \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2L} \exp \Psi(t)}. \quad (3.19b)$$

Démonstration : On suppose qu'il existe deux fonctions α et β du temps, définies et dérivables sur un intervalle $[0, \mathcal{T}]$ pour $\mathcal{T} > 0$, telles que la fonction caractéristique du domaine $\Omega_1(t) = [\alpha(t), \beta(t)]$ soit solution de (3.17). On considère donc une solution créneau de la forme :

$$Y(t, x) = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha(t) \leq x \leq \beta(t), \\ 0, & \text{si } -L \leq x < \alpha(t) \text{ ou } \beta(t) < x \leq L. \end{cases}$$

Il vient ensuite par intégration et en tenant compte des conditions aux limites $u(t, -L) = u(t, L) = 0$:

$$u(t, x) = \psi(t) \begin{cases} -(x+L) \left[\frac{\beta(t) - \alpha(t)}{2L} \right] & \text{si } -L \leq x < \alpha(t), \\ x \left[1 - \frac{\beta(t) - \alpha(t)}{2L} \right] + \gamma(t) & \text{si } \alpha(t) \leq x \leq \beta(t), \\ (L-x) \left[\frac{\beta(t) - \alpha(t)}{2L} \right] & \text{si } \beta(t) < x \leq L. \end{cases}$$

La continuité de u à la traversée de l'interface $x = \alpha(t)$ permet de déterminer γ :

$$\gamma(t) = -\frac{\alpha(t) + \beta(t)}{2}.$$

On obtient finalement :

$$u(t, x) = \psi(t) \begin{cases} -(x+L) \left[\frac{\beta(t) - \alpha(t)}{2L} \right] & \text{si } -L \leq x < \alpha(t), \\ x \left[1 - \frac{\beta(t) - \alpha(t)}{2L} \right] - \frac{\alpha(t) + \beta(t)}{2} & \text{si } \alpha(t) \leq x \leq \beta(t), \\ (L-x) \left[\frac{\beta(t) - \alpha(t)}{2L} \right] & \text{si } \beta(t) < x \leq L. \end{cases}$$

On vérifie également la continuité en $x = \beta(t)$. Écrivons ensuite la relation de Rankine et Hugoniot pour les solutions faibles discontinues de l'équation d'advection $\partial_t Y + u \partial_x Y = 0$, i.e. vérifiant la relation suivante, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty([0, \mathcal{T}] \times [-L, L])$:

$$\iint_{[0, \mathcal{T}] \times [-L, L]} Y(t, x) (\partial_t \varphi(t, x) + \partial_x (u \varphi)(t, x)) \, dx dt + \int_{-L}^L Y^0(x) \varphi(0, x) \, dx = 0,$$

avec u donné par la dernière équation de (3.17). Compte-tenu de l'égalité :

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \varphi(t, x) \, dx \right) = \beta'(t) \varphi(t, \beta(t)) - \alpha'(t) \varphi(t, \alpha(t)) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \partial_t \varphi(t, x) \, dx,$$

l'égalité faible s'écrit :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\alpha(\mathcal{T})}^{\beta(\mathcal{T})} \varphi(\mathcal{T}, x) \, dx - \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \varphi(0, x) \, dx + \int_{-L}^L Y^0(x) \varphi(0, x) \, dx \\ &\quad + \int_0^{\mathcal{T}} \left\{ -\beta'(t) \varphi(t, \beta(t)) + \alpha'(t) \varphi(t, \alpha(t)) + [u(t, \cdot) \varphi(t, \cdot)]_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \right\} dt \\ &= \int_0^{\mathcal{T}} [\varphi(t, \beta(t)) \{u(t, \beta(t)) - \beta'(t)\} - \varphi(t, \alpha(t)) \{u(t, \alpha(t)) - \alpha'(t)\}] dt. \end{aligned}$$

Par densité, on en déduit la condition de saut à travers les discontinuités régulières $x = \alpha(t)$ et $x = \beta(t)$:

$$\alpha'(t) = u(t, \alpha(t)) \quad \text{et} \quad \beta'(t) = u(t, \beta(t)).$$

Compte-tenu de l'expression de u obtenue précédemment, ces conditions s'écrivent :

$$\alpha'(t) = -\psi(t)(L + \alpha(t)) \frac{\beta(t) - \alpha(t)}{2L}, \quad (\text{Prop.3.1.i})$$

et :

$$\beta'(t) = \psi(t)(L - \beta(t)) \frac{\beta(t) - \alpha(t)}{2L}.$$

Notons $V(t) := \frac{\beta(t) - \alpha(t)}{2L}$ le volume relatif de la bulle. D'après les deux égalités précédentes, V est solution de l'équation différentielle ordinaire d'ordre 1 :

$$\begin{cases} V'(t) = \psi(t)V(t)(1 - V(t)), \\ V(0) = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2L} \in]0, 1[. \end{cases}$$

On retrouve ici le résultat du **lemme 3.10**, dont la solution est donnée par :

$$V(t) = \frac{V(0) \exp \Psi(t)}{1 - V(0) + V(0) \exp \Psi(t)}.$$

Par ailleurs, en considérant l'équation (Prop.3.1.i), on remarque que la variable $\hat{\alpha}(t) = \alpha(t) + L$ satisfait l'égalité :

$$\frac{\hat{\alpha}'(t)}{\hat{\alpha}(t)} = -\psi(t)V(t).$$

De $\Psi' = \psi$, on déduit que $\psi V = (\ln [1 - V(0) + V(0) \exp \Psi])'$, et :

$$\alpha(t) = \frac{\frac{\alpha_0 + \beta_0}{2} - LV(0) \exp \Psi(t)}{1 - V(0) + V(0) \exp \Psi(t)},$$

puis de $\beta(t) = 2LV(t) + \alpha(t)$:

$$\beta(t) = \frac{\frac{\alpha_0 + \beta_0}{2} + LV(0) \exp \Psi(t)}{1 - V(0) + V(0) \exp \Psi(t)}.$$

■

On a ainsi un résultat d'**existence d'une solution faible en dimension 1**, même si aucun résultat ne garantit l'unicité. Toutefois, la construction de cette solution montre qu'elle est la seule de la forme $\mathbf{1}_{\Omega_1(t)}(x)$ avec $\Omega_1(t) \subset [-L, L]$ simplement connexe. De plus, **cette solution est globale en temps**.

On vérifie également que $\alpha(t) + L$ (resp. $\beta(t) - L$) est du signe de $\alpha_0 + L$ (resp. $\beta_0 - L$) pour tout $t \geq 0$, *i.e.* $\alpha(t) > -L$ (resp. $\beta(t) < L$) : la **bulle ne peut atteindre le bord du domaine en temps fini**. De même, l'inégalité $\beta(t) - \alpha(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$ assure que **la bulle ne disparaît jamais**.

Une autre remarque porte sur la monotonie par rapport à la donnée initiale. La solution obtenue **dépend continûment des données initiales** α_0 et β_0 . On vérifie même que α et β sont croissants par rapport à α_0 et β_0 , ce qui signifie que si l'on prend :

$$\alpha_{0,1} < \alpha_{0,2} < \beta_{0,2} < \beta_{0,1} \iff \Omega_2(0) \subset \Omega_1(0),$$

i.e. $Y_1^0 \geq Y_2^0$, alors $\alpha_1(t) \leq \alpha_2(t) \leq \beta_2(t) \leq \beta_1(t)$, $\Omega_2(t) \subset \Omega_1(t)$ et $Y_1 \geq Y_2$.

Par ailleurs, cette solution vérifie la propriété de symétrie décrite dans la partie précédente : si le domaine $\Omega_1(0)$ est symétrique initialement par rapport à l'origine, ce qui correspond à Y^0 paire ($\alpha_0 = -\beta_0$), on vérifie que Y reste paire ($\alpha(t) = -\beta(t)$) en accord avec le **lemme 3.7**.

On donne enfin l'expression du potentiel de vitesse associé au champ u :

$$\phi(t, x) = \psi(t) \begin{cases} -\frac{(x+L)^2}{2} V(t) & \text{si } -L \leq x < \alpha(t), \\ \frac{x^2}{2} [1 - V(t)] - \frac{\alpha(t) + \beta(t)}{2} x + \frac{\alpha(t)^2}{2} - \frac{L^2}{2} V(t) & \text{si } \alpha(t) \leq x \leq \beta(t), \\ -\frac{(L-x)^2}{2} V(t) + \frac{\alpha(t)^2 - \beta(t)^2}{2} & \text{si } \beta(t) < x \leq L. \end{cases}$$

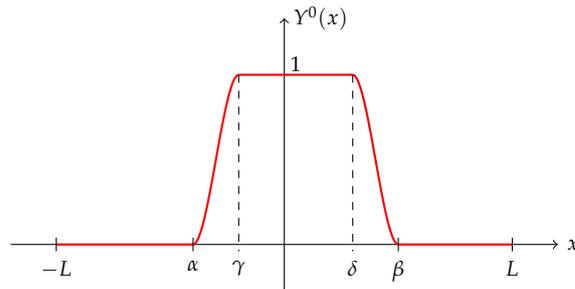
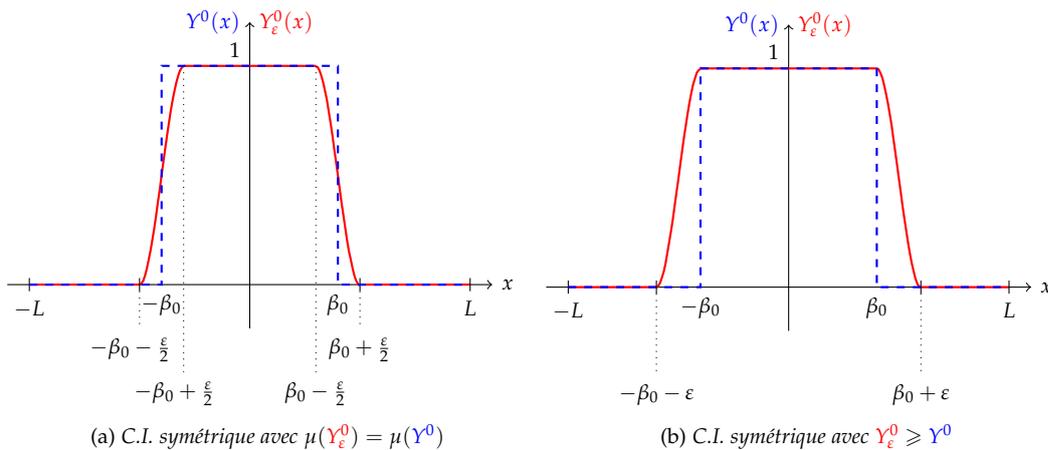


FIG. 3.3 – Un exemple de donnée initiale régulière



(a) C.I. symétrique avec $\mu(Y_\epsilon^0) = \mu(Y^0)$

(b) C.I. symétrique avec $Y_\epsilon^0 \geq Y^0$

FIG. 3.4 – Exemples de données initiales paires, régulières (rouge) et irrégulière (bleu)

3.2.3 Approximations de solutions discontinues

On a démontré dans le paragraphe précédent qu’il existait une solution faible lorsque la condition initiale était de type « bulle ». Dans la mesure où l’unicité n’est pas prouvée, on va chercher à construire une famille de solutions régulières paramétrée par la taille de la zone de régularisation initiale et étudier la convergence de cette famille lorsque le paramètre tend vers 0. Ceci légitime les études préliminaires sur les données régulières (de type \mathcal{H}^s , cf. **théorème 3.1**) bien que le cadre originel de l’étude soit celui des bulles (donc des données discontinues). Le but de cette partie est d’étudier la qualité de l’approximation ainsi faite, par exemple en montrant la convergence des solutions régulières vers la solution discontinue de la partie précédente (ce qui laisserait supposer que cette solution est unique) lorsque la zone de régularisation tend vers 0 (cf. FIG. 3.4), avec une étude du temps d’existence et du profil des solutions.

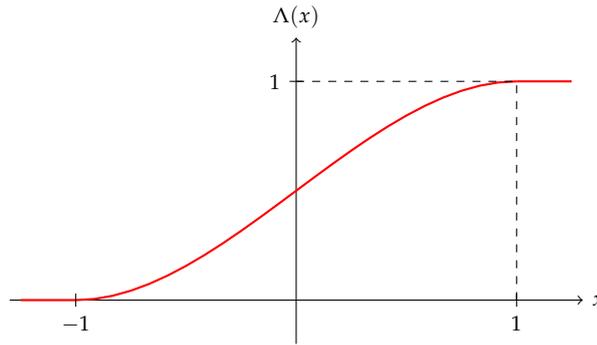


FIG. 3.5 – Exemple de fonction « marche »

Construction

On reprend la donnée initiale de la partie 3.2.2, notée Y^0 et représentée en bleu sur les figures 3.4. On construit à partir de Y^0 une condition initiale Y_ε^0 régularisée sur une zone de taille $\varepsilon > 0$, au sens où on conserve des intervalles sur lesquels Y_ε^0 est constante à 1 et à 0, avec une transition continue (plus précisément au moins \mathcal{H}^2 pour satisfaire l'hypothèse du **théorème 3.1**, à savoir $s > s_0 = 1$ en dimension 1) et strictement monotone dans chacune des zones de régularisation. Dans un souci de clarté, on se place dans le cas où **les données initiales sont paires**, ce qui simplifie les calculs. On rappelle que la finalité est d'étudier **l'influence de l'épaisseur de la zone de régularisation sur la forme de la solution**, et l'écart entre cette dernière et la solution du paragraphe 3.2.2.

Tout d'abord, précisons la forme de la donnée dans la zone de régularisation : on considère une fonction « marche », croissante, continue, qui prend la valeur 0 en -1 et la valeur 1 en 1 (cf. Fig. 3.5). Entre autres exemples, on peut prendre :

- une fonction P_n polynomiale par morceaux (de degré impair $n \geq 1$ sur $[-1, 1]$) satisfaisant les conditions $P_n(-1) = 0$, $P_n(1) = 1$, puis $P_n^{(j)}(-1) = P_n^{(j)}(1) = 0$ pour toutes les dérivées d'ordre $j \geq 1$ tant que le degré du polynôme le permet ($j \leq \frac{n+1}{2}$). Par exemple :

$$\begin{aligned} \circ P_1(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1, \\ \frac{x+1}{2} & \text{si } x \in [-1, 1], \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases} \\ \circ P_3(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1, \\ \frac{-1}{4} [x^3 - 3x - 2] & \text{si } x \in [-1, 1], \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases} \\ \circ P_5(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1, \\ \frac{1}{2048} [384x^5 - 1280x^3 + 1920x + 1024] & \text{si } x \in [-1, 1], \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

À noter que ces fonctions sont d'intégrales sur $[-1, 1]$ égales à 1.

- une fonction Φ construite selon la formule :

$$\Phi(x) = \frac{\int_{-\infty}^x \varphi(y) dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) dy},$$

pour une fonction φ positive et de classe \mathcal{C}_0^∞ nulle en dehors de $[-1, 1]$. On peut prendre par exemple :

$$\varphi(x) = \exp\left(\frac{-x^2}{1-x^2}\right) \mathbf{1}_{]-1,1[}(x).$$

Φ vérifie les conditions de continuité en -1 et en 1 à tous les ordres et est d'intégrale égale à 1 sur $[-1, 1]$.

Grâce à cette fonction « marche » que l'on notera Λ en toute généralité dans toute la suite, on construit une régularisation par changement de variables linéaire (cf. FIG. 3.3) :

$$Y_\Lambda^0 = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1, \alpha[, \\ \Lambda\left(2\frac{x-\alpha}{\gamma-\alpha} - 1\right) & \text{si } x \in [\alpha, \gamma], \\ 1 & \text{si } x \in]\gamma, \delta[, \\ \Lambda\left(2\frac{\beta-x}{\beta-\delta} - 1\right) & \text{si } x \in [\delta, \beta], \\ 0 & \text{si } x \in]\beta, 1]. \end{cases}$$

Donnons la régularité des fonctions Y_Λ^0 (qui sont toutes au moins continues) pour les différentes fonctions « marche » évoquées ci-dessus :

- $\Lambda = P_1 \longrightarrow Y_\Lambda^0 \in W^{1,\infty}(-L, L) \subset \mathcal{H}^1(-L, L)$;
- $\Lambda = P_3 \longrightarrow Y_\Lambda^0 \in W^{2,\infty}(-L, L) \subset \mathcal{H}^2(-L, L)$;
- $\Lambda = P_5 \longrightarrow Y_\Lambda^0 \in W^{3,\infty}(-L, L) \subset \mathcal{H}^3(-L, L)$;
- $\Lambda = \Phi \longrightarrow Y_\Lambda^0 \in \mathcal{C}_0^\infty(-L, L)$.

Afin d'approcher la donnée initiale Y^0 discontinue, on se donne un réel $\varepsilon > 0$, qui par la suite désignera la taille des zones de régularisation, et à partir duquel on construit la donnée régularisée Y_ε^0 . On peut par exemple régulariser de manière symétrique par rapport à la discontinuité (cf. FIG. 3.4a), ce qui assure l'égalité des moyennes entre les données continue et discontinue. Une autre possibilité consiste à raccorder le plateau entier à l'axe des abscisses (cf. FIG. 3.4b). Les données vérifient ainsi $Y_\varepsilon^0 \geq Y^0$.

On étudie dans un premier temps les propriétés qualitatives des solutions régularisées avant d'établir une expression des solutions pour toute donnée initiale bornée.

Étude qualitative

On se place ici dans le cadre défini par les hypothèses du **théorème 3.1**, *i.e.* $Y_\varepsilon^0 \in \mathcal{H}^2(-L, L)$.⁹ On se place dans le cadre de la figure 3.4b, *i.e.* :

$$Y_\varepsilon^0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-L, -\beta_0 - \varepsilon \cup \beta_0 + \varepsilon, L], \\ \Lambda \left(2 \frac{x + \beta_0}{\varepsilon} + 1 \right) & \text{si } x \in [-\beta_0 - \varepsilon, -\beta_0], \\ \Lambda \left(2 \frac{\beta_0 - x}{\varepsilon} + 1 \right) & \text{si } x \in [\beta_0, \beta_0 + \varepsilon], \\ 1 & \text{si } x \in] -\beta_0, \beta_0[. \end{cases} \quad (3.20)$$

On cherche à déterminer le profil de l'unique solution Y_ε associée (dont le temps d'existence est noté \mathcal{T}_ε). On sait, par le principe du maximum (**lemme 3.5**), que Y_ε est à valeurs dans $[0, 1]$. De plus, la moyenne μ_ε de Y_ε est donnée par le **théorème 3.3**. À noter que les intégrales intervenant dans cette formule de la moyenne s'expriment ici par :

$$\int_{-L}^L \exp[\Psi(t)Y_\varepsilon^0(x)] dx = 2 \left(L - \beta_0 - \varepsilon + \beta_0 e^{\Psi(t)} + \frac{\varepsilon}{2} \int_{-1}^1 \exp[\Psi(t)\Lambda(x)] dx \right), \quad (3.21a)$$

$$\int_{-L}^L Y_\varepsilon^0(x) \exp[\Psi(t)Y_\varepsilon^0(x)] dx = 2 \left(\beta_0 e^{\Psi(t)} + \frac{\varepsilon}{2} \int_{-1}^1 \Lambda(x) \exp[\Psi(t)\Lambda(x)] dx \right). \quad (3.21b)$$

La méthode des caractéristiques (*cf.* § 2.4) permet de caractériser cette solution de manière qualitative. Le champ de vitesse associé étant suffisamment régulier, on peut appliquer les résultats décrits dans le paragraphe correspondant. On rappelle que le flot caractéristique \mathcal{X}_ε est défini comme la solution de l'EDO :

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{X}_\varepsilon}{dt} = u_\varepsilon(t, \mathcal{X}_\varepsilon(t)), \\ \mathcal{X}_\varepsilon(s) = x_0, \end{cases} \quad (3.22a)$$

avec :

$$u_\varepsilon(t, x) = \psi(t) \left[\int_{-L}^x Y_\varepsilon(t, y) dy - (x + L)\mu_\varepsilon(t) \right]. \quad (3.22b)$$

De plus, $\mathcal{X}_\varepsilon = \mathcal{X}_\varepsilon(t; s, x_0)$ est de classe $\mathcal{C}^1([0, \mathcal{T}_\varepsilon]^2 \times [-L, L])$ et est bijective par rapport à x_0 , pour tous t et s fixés. En particulier, $x \mapsto \mathcal{X}_\varepsilon(0; t, x)$ est bijective de $[\mathcal{X}_\varepsilon(t; 0, -\beta_0), \mathcal{X}_\varepsilon(t; 0, \beta_0)]$ dans $[-\beta_0, \beta_0]$. D'où, par l'égalité :

$$Y_\varepsilon(t, x) = Y_\varepsilon^0(\mathcal{X}_\varepsilon(0; t, x)),$$

on déduit que $Y_\varepsilon(t, \cdot) \equiv 1$ sur $[\mathcal{X}_\varepsilon(t; 0, -\beta_0), \mathcal{X}_\varepsilon(t; 0, \beta_0)]$. On raisonne de même pour les intervalles $[-L, \mathcal{X}_\varepsilon(t; 0, -\beta_0 - \varepsilon)]$ et $[\mathcal{X}_\varepsilon(t; 0, \beta_0 + \varepsilon), L]$ sur lesquels la fonction $Y_\varepsilon(t, \cdot)$ est identiquement nulle. On en déduit que le profil de Y_ε est semblable à celui de Y_ε^0 , à savoir un profil à support compact comportant un plateau sur lequel la fonction est égale à 1.

⁹ On exclut donc le cas $\Lambda = P_1$ car la régularité n'est alors pas suffisante.

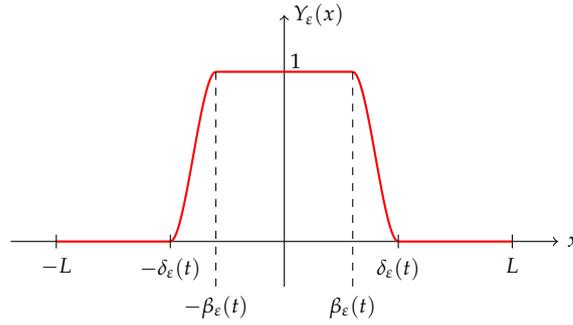


FIG. 3.6 – Profil de la solution régulière Y_ε

Convergence

Notons tout d'abord que :

- pour le cas de la figure 3.4a :

$$\|Y^0 - Y_\varepsilon^0\|_{L^1} = \varepsilon \times C_{\Lambda,1} \quad \text{et} \quad \|Y^0 - Y_\varepsilon^0\|_{L^2} = \varepsilon \times C_{\Lambda,2},$$

où $C_{\Lambda,1} = 2 \left(1 - \int_0^1 \Lambda(x) dx \right)$ et $C_{\Lambda,2} = \left(1 + \int_{-1}^1 \Lambda^2(x) dx - 2 \int_0^1 \Lambda(x) dx \right)$.

- pour le cas de la figure 3.4b :

$$\|Y^0 - Y_\varepsilon^0\|_{L^1} = \varepsilon \quad \text{et} \quad \|Y^0 - Y_\varepsilon^0\|_{L^2} = \varepsilon \times C_{\Lambda,3},$$

où $C_{\Lambda,3} = \int_{-1}^1 \Lambda^2(x) dx$.

Les données régularisées ainsi construites convergent bien vers Y^0 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Reste à étudier la convergence de la suite (Y_ε) lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ dans la perspective de construire une solution faible du problème.

On se place dans le cadre de la figure 3.4b. Le profil de Y_ε est donné sur la figure 3.6, d'après les remarques du paragraphe précédent. On note $\beta_\varepsilon(t) = \mathcal{X}_\varepsilon(t; 0, \beta_0)$ et $\delta_\varepsilon(t) = \mathcal{X}_\varepsilon(t; 0, \beta_0 + \varepsilon)$.

Par parité et compte-tenu du profil de Y_ε , on a la relation :

$$\mu_\varepsilon(t) = \frac{1}{2L} \int_{-\delta_\varepsilon(t)}^{\delta_\varepsilon(t)} Y_\varepsilon(t, x) dx = \frac{\beta_\varepsilon(t)}{L} + \frac{1}{L} \int_{\beta_\varepsilon(t)}^{\delta_\varepsilon(t)} Y_\varepsilon(t, x) dx. \quad (3.23)$$

D'après (3.22a), (3.22b) et (3.23), β_ε vérifie l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} \beta'_\varepsilon(t) &= \psi(t) \left[2L\mu_\varepsilon(t) - \int_{\beta_\varepsilon(t)}^{\delta_\varepsilon(t)} Y_\varepsilon(t, y) dy - (\beta_\varepsilon(t) + L)\mu_\varepsilon(t) \right] \\ &= \psi(t) \left[2L\mu_\varepsilon(t) - (L\mu_\varepsilon(t) - \beta_\varepsilon(t)) - (\beta_\varepsilon(t) + L)\mu_\varepsilon(t) \right] \\ &= \psi(t)\beta_\varepsilon(t)(1 - \mu_\varepsilon(t)). \end{aligned} \quad (3.24a)$$

Intéressons-nous ensuite à δ_ε . On a de manière analogue :

$$\begin{aligned}\delta'_\varepsilon(t) &= \psi(t) \int_{-L}^{\delta_\varepsilon(t)} Y_\varepsilon(t, x) dx - (\delta_\varepsilon(t) + L)\mu_\varepsilon(t), \\ &= \psi(t) [2L\mu_\varepsilon(t) - (\delta_\varepsilon(t) + L)\mu_\varepsilon(t)], \\ &= \psi(t)\mu_\varepsilon(t)(L - \delta_\varepsilon(t)).\end{aligned}\tag{3.24b}$$

En multipliant (3.24a) par $L - \delta_\varepsilon$ et (3.24b) par β_ε , on obtient en sommant :

$$(L - \delta_\varepsilon)\beta'_\varepsilon + \beta_\varepsilon\delta'_\varepsilon = \psi(L - \delta_\varepsilon)\beta_\varepsilon.$$

En divisant par $-\beta_\varepsilon^2$, on vérifie que :

$$\left(\frac{L - \delta_\varepsilon}{\beta_\varepsilon}\right)' = -\psi \frac{L - \delta_\varepsilon}{\beta_\varepsilon}.$$

D'où :

$$\frac{\beta_\varepsilon(t)}{L - \delta_\varepsilon(t)} = \kappa_{0,\varepsilon} \exp \Psi(t), \quad \text{avec } \kappa_{0,\varepsilon} = \frac{\beta_0}{L - \beta_0 - \varepsilon}.\tag{3.25}$$

On connaît donc explicitement le rapport de la taille de la zone où $Y_\varepsilon \equiv 1$ (plateau à 1) sur celle de la zone où $Y_\varepsilon \equiv 0$ (plateau à 0), paramétré par la fonction Ψ et le rapport initial des deux plateaux.

Par ailleurs, les équations (3.24a) et (3.24b) montrent que β'_ε et δ'_ε sont de même signe, ce qui signifie que les extrémités de la zone de régularisation évoluent dans le même sens (paramétré par le signe de ψ). Mais cela ne donne pas l'évolution de la taille de l'interface. Par soustraction des deux EDOs, il vient :

$$(\delta_\varepsilon - \beta_\varepsilon)'(t) = \psi(t) [L\mu_\varepsilon(t) - \beta_\varepsilon(t) - (\delta_\varepsilon(t) - \beta_\varepsilon(t))\mu_\varepsilon(t)].$$

Or, d'après (3.23) :

$$L\mu_\varepsilon(t) - \beta_\varepsilon(t) = \int_{\beta_\varepsilon(t)}^{\delta_\varepsilon(t)} Y_\varepsilon(t, x) dx = (\delta_\varepsilon(t) - \beta_\varepsilon(t)) \int_0^1 Y_\varepsilon[t, \beta_\varepsilon(t) + \sigma(\delta_\varepsilon(t) - \beta_\varepsilon(t))] d\sigma.$$

D'où :

$$(\delta_\varepsilon - \beta_\varepsilon)'(t) = \psi(t)(\delta_\varepsilon(t) - \beta_\varepsilon(t)) \left[\int_0^1 Y_\varepsilon[t, \beta_\varepsilon(t) + \sigma(\delta_\varepsilon(t) - \beta_\varepsilon(t))] d\sigma - \mu_\varepsilon(t) \right].$$

Le crochet est majoré par 2 du fait que la fonction Y_ε est majorée par 1 (il en est de même pour μ_ε). Avec $(\delta_\varepsilon - \beta_\varepsilon)(0) = \varepsilon$, il vient :

$$0 \leq \delta_\varepsilon(t) - \beta_\varepsilon(t) \leq \varepsilon \exp(2\tilde{\Psi}(t)).$$

On déduit que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t) - \beta_\varepsilon(t) = 0.$$

Or, d'après (3.25), on a :

$$\delta_\varepsilon(t) = \frac{(L - \beta_0 - \varepsilon)(\delta_\varepsilon(t) - \beta_\varepsilon(t)) + L\beta_0 \exp \Psi(t)}{L - \beta_0 - \varepsilon + \beta_0 \exp \Psi(t)}.$$

$\delta_\varepsilon(t)$ admet donc une limite quand ε tend vers 0, donnée par :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \beta_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t) = \frac{L\beta_0 \exp \Psi(t)}{L - \beta_0 + \beta_0 \exp \Psi(t)} = \beta(t),$$

β étant la solution dans le cas discontinu de la partie 3.2.2. On pourrait conclure à la convergence de la solution régularisée vers la solution irrégulière obtenue précédemment, à ceci près que les fonctions β_ε et δ_ε sont considérées comme les solutions d'équations différentielles dont le temps d'existence dépend de ε .

Toutefois, en notant que la fonction μ_ε , considérée comme le second membre dans le **théorème 3.3** (et non plus comme la moyenne d'une solution du modèle), est explicitement connue et définie sur \mathbb{R}_+ , les solutions des EDOs (3.24a) et (3.24b) sont également définies sur \mathbb{R}_+ , avec :

$$\beta_\varepsilon(t) = \frac{\beta_0 \exp \Psi(t)}{\exp \int_0^t \psi(\tau) \mu_\varepsilon(\tau) d\tau} = \frac{L\beta_0 \exp \Psi(t)}{L - \beta_0 - \varepsilon + \beta_0 e^{\Psi(t)} + \frac{\varepsilon}{2} \int_{-1}^1 e^{\Psi(t)\Lambda(x)} dx}, \quad (3.26a)$$

où on a utilisé les formules (3.13) et (3.21), et :

$$\delta_\varepsilon(t) = \frac{L \left(\beta_0 e^{\Psi(t)} + \frac{\varepsilon}{2} \int_{-1}^1 e^{\Psi(t)\Lambda(x)} dx \right)}{L - \beta_0 - \varepsilon + \beta_0 e^{\Psi(t)} + \frac{\varepsilon}{2} \int_{-1}^1 e^{\Psi(t)\Lambda(x)} dx}. \quad (3.26b)$$

À titre indicatif, ces expressions permettent de situer le plateau régularisé par rapport au plateau discontinu $[-\beta(t), \beta(t)]$ (cf. **proposition 3.1**). En effet, avec :

$$\beta_\varepsilon(t) - \beta(t) = \frac{\varepsilon L \beta_0 e^{\Psi(t)} \int_{-1}^1 (1 - e^{\Psi(t)\Lambda(x)}) dx}{2 \left(L - \beta_0 + \beta_0 e^{\Psi(t)} \right) \left(L - \beta_0 - \varepsilon + \beta_0 e^{\Psi(t)} + \frac{\varepsilon}{2} \int_{-1}^1 e^{\Psi(t)\Lambda(x)} dx \right)},$$

$$\delta_\varepsilon(t) - \beta(t) = \varepsilon L \frac{\beta_0 e^{\Psi(t)} + \frac{L - \beta_0}{2} \int_{-1}^1 e^{\Psi(t)\Lambda(x)} dx}{2 \left(L - \beta_0 + \beta_0 e^{\Psi(t)} \right) \left(L - \beta_0 - \varepsilon + \beta_0 e^{\Psi(t)} + \frac{\varepsilon}{2} \int_{-1}^1 e^{\Psi(t)\Lambda(x)} dx \right)},$$

on constate que $\delta_\varepsilon(t) > \beta(t)$ quels que soient $t \geq 0$ et $\varepsilon > 0$ (le pied de la régularisation reste à droite de la discontinuité) tandis que le signe de $\beta_\varepsilon - \beta$ dépend de celui de Ψ : si $\Psi(t) > 0$, alors $\beta_\varepsilon(t) < \beta(t)$ et la discontinuité est à l'intérieur de la zone de régularisation ; en revanche, lorsque $\Psi(t) < 0$, on a $\beta_\varepsilon(t) > \beta(t)$, ce qui signifie que la vitesse de propagation du plateau dans le cas discontinu est plus grande (en valeur absolue) que celle du plateau régularisé.

Dans tous les cas, on retrouve bien dans (3.26) la limite β lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Mais si β_ε et δ_ε sont des fonctions définies sur \mathbb{R}_+ , il n'en est pas de même pour la solution Y_ε , qui n'est *a priori* définie que sur $[0, \mathcal{T}_\varepsilon]$, avec \mathcal{T}_ε défini par (3.4), i.e. :¹⁰

$$\left[\sum_{k=0}^2 4^k \varepsilon^{1-2k} \|\Lambda^{(k)}\|_0^2 - \varepsilon \right]^{1/2} \int_0^{\mathcal{T}_\varepsilon} |\psi(\tau)| \, d\tau \leq \frac{1}{e \cdot C_{abv}(s=2, d=1, \Omega=) - L, L]}.$$

Comme le crochet tend vers $+\infty$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$, on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{T}_\varepsilon = 0.$$

C'est pourquoi on est amené à utiliser un autre raisonnement pour conclure, à savoir la construction d'une solution explicite et globale en temps, ce qui justifiera les calculs effectués ci-dessus.

Solutions explicites du modèle ABV

On reprend l'idée du paragraphe précédent, à savoir l'utilisation de la méthode des caractéristiques. Les propriétés de ce système permettent en effet de déterminer explicitement le flot caractéristique, et par suite les solutions du modèle (uniques dans le cas régulier, faibles sinon).

On utilise de nouveau les résultats de la partie 2.4 que l'on applique à la solution de (3.22a) avec pour origine du temps $s = 0$. En résolvant l'EDO (2.6) dont le jacobien de \mathcal{X}_ε est solution, il vient :¹¹

$$\begin{aligned} \partial_{x_0} \mathcal{X}_\varepsilon(t; 0, x_0) &= \exp \left[\int_0^t \partial_x u_\varepsilon(\tau, \mathcal{X}_\varepsilon(\tau; 0, x_0)) \, d\tau \right], \\ &= \exp \left[\int_0^t \psi(\tau) [Y_\varepsilon(\tau, \mathcal{X}_\varepsilon(\tau; 0, x_0)) - \mu_\varepsilon(\tau)] \, d\tau \right], \\ &= \exp \left[\Psi(t) Y_\varepsilon^0(x_0) \right] \exp \left[- \int_0^t \psi(\tau) \mu_\varepsilon(\tau) \, d\tau \right], \\ &= 2L \frac{\exp \left[\Psi(t) Y_\varepsilon^0(x_0) \right]}{\int_{-L}^L \exp \left[\Psi(t) Y_\varepsilon^0(y) \right] \, dy}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

compte-tenu de (3.13). On intègre alors cette dernière égalité par rapport à x_0 , ce qui donne :

$$\mathcal{X}_\varepsilon(t; 0, x_0) = 2L \frac{\int_{-L}^{x_0} \exp \left[\Psi(t) Y_\varepsilon^0(y) \right] \, dy}{\int_{-L}^L \exp \left[\Psi(t) Y_\varepsilon^0(y) \right] \, dy} + \zeta_\varepsilon(t).$$

¹⁰ On a calculé ici la norme \mathcal{H}^2 de Y_ε^0 donnée par (3.20).

¹¹ Ce qui permet de conclure en dimension 1 est que le déterminant de la matrice jacobienne se résume à l'unique coefficient de cette matrice, ce qui rend délicat l'application de ces calculs en dimensions supérieures.

Etant donné $\mathcal{X}_\varepsilon(t; 0, L) = L$, il vient $\xi_\varepsilon(t) = -L$ et :

$$\mathcal{X}_\varepsilon(t; 0, x_0) = 2L \frac{\int_{-L}^{x_0} \exp \left[\Psi(t) Y_\varepsilon^0(y) \right] dy}{\int_{-L}^L \exp \left[\Psi(t) Y_\varepsilon^0(y) \right] dy} - L. \quad (3.28)$$

Les solutions du modèle ABV sont donc données par :

$$Y_\varepsilon(t, x) = Y_\varepsilon^0(\mathcal{X}_\varepsilon^{-1}(t, x)),$$

où $\mathcal{X}_\varepsilon^{-1}(t, x) = \mathcal{X}_\varepsilon(0; t, x)$ est l'inverse (en temps que fonction de la variable x) de la fonction $\mathcal{X}_\varepsilon(t; 0, x)$. Ce résultat est implicite, dans la mesure où l'inversion de la fonction $x_0 \mapsto \mathcal{X}_\varepsilon(t; 0, x_0)$ n'est pas directe. Toutefois, comme la fonction explicitée dans (3.28) est définie pour tout temps $t \geq 0$, **la solution ci-dessus est globale en temps**. En particulier, la convergence de β_ε et δ_ε établie au paragraphe précédent reste vraie sur \mathbb{R}_+ , ce qui assure que :

Y_ε converge vers Y (définie par la Prop. 3.1) presque partout lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Comme l'inverse de $x_0 \mapsto \mathcal{X}_\varepsilon(t; 0, x_0)$ est $x \mapsto \mathcal{X}_\varepsilon(0; t, x)$, on est tenté de reprendre le même raisonnement pour déterminer cette fonction, à partir de l'équation du jacobien. Malheureusement, on aboutit à l'égalité :

$$\begin{aligned} \partial_x \mathcal{X}_\varepsilon(0; t, x) &= \exp \left[- \int_0^t \psi(\tau) Y_\varepsilon(\tau, \mathcal{X}_\varepsilon(\tau; t, x)) d\tau \right] \exp \left[\int_0^t \psi(\tau) \mu_\varepsilon(\tau) d\tau \right], \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \exp \left[\Psi(t) Y_\varepsilon^0(y) \right] dy \cdot \exp \left[-\Psi(t) Y_\varepsilon(t, x) \right], \end{aligned}$$

qui dépend de Y_ε , ce qui ne fournit donc pas de formule explicite pour le flot inverse.

Mais on remarque surtout que l'expression (3.28) a toujours un sens pour des données initiales Y_ε^0 moins régulières. On établit donc le résultat suivant, qui fournit une expression implicite de solutions dans le cas L^∞ :

Théorème 3.4

Soient $Y^0 \in L^\infty(-L, L)$ et ψ continue de primitive Ψ s'annulant en 0. Alors une solution faible globale en temps du système (3.17) est donnée par $\mathcal{Y}(t, x) = Y^0(\Theta_t^{-1}(x))$, où Θ_t^{-1} est la réciproque (par rapport à x_0) de la fonction :

$$\Theta(t, x_0) = 2L \frac{\int_{-L}^{x_0} \exp \left[\Psi(t) Y^0(y) \right] dy}{\int_{-L}^L \exp \left[\Psi(t) Y^0(y) \right] dy} - L. \quad (3.29)$$

Démonstration : On commence par caractériser Θ définie par (3.29) (en tant que fonction et plus en tant que flot caractéristique). Sachant que $Y^0 \in L^\infty(-L, L)$ et que $\Psi \in \mathcal{C}^1(0, +\infty)$, on a $\Theta \in \mathcal{C}^1([0, \mathcal{T}], W^{1, \infty}(-L, L))$ pour tout temps $\mathcal{T} > 0$. De plus, pour tout $t \in [0, \mathcal{T}]$, $\Theta(t, \cdot)$ est continu et croissant de $[-L, L]$ dans lui-même. $\Theta(t, \cdot)$ est donc un homéomorphisme

sur $[-L, L]$. On note Θ_t^{-1} son inverse. De surcroît, Θ_t^{-1} est continu par rapport à ses deux variables, ce qui prouve que la fonction $\mathcal{Y}(t, x) = \Upsilon^0(\Theta_t^{-1}(x))$ est bien dans $L^\infty([0, \mathcal{T}] \times \Omega)$. Par ailleurs, l'inégalité

$$|\Theta(t, x_1) - \Theta(t, x_2)| \leq |x_1 - x_2| \cdot \exp\left(2 \sup_{[0, \mathcal{T}]} |\Psi| \cdot \|\Upsilon^0\|_\infty\right)$$

prouve que $\Theta(t, \cdot)$ est lipschitzienne. On peut donc appliquer le résultat suivant de changement de variable lipschitzien [38] :

$$\forall f \in L^1(-L, L), \int_{-L}^L f(x) dx = \int_{-L}^L f \circ \Theta(t, x_0) |\partial_{x_0} \Theta(t, x_0)| dx_0. \quad (\text{Th.3.4.i})$$

Ces remarques étant faites, montrons que la fonction $\mathcal{Y} = \Upsilon^0 \circ \Theta_t^{-1}$ est une solution faible du modèle ABV , i.e. satisfaisant l'égalité (3.10) pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_{\mathcal{T}})$, avec $\Omega_{\mathcal{T}} = [0, \mathcal{T}] \times \Omega$. En dimension 1, cette égalité faible s'écrit :

$$\iint_{\Omega_{\mathcal{T}}} \Upsilon [\partial_t \varphi + u \partial_x \varphi + \psi(t) \varphi (Y - \mu(t))](t, x) dt dx + \int_{-L}^L \Upsilon^0(x) \varphi(0, x) dx = 0. \quad (\text{Th.3.4.ii})$$

On note \mathcal{U} la vitesse associée à \mathcal{Y} via (3.17). Après calculs, on a :

$$\partial_{x_0} \Theta(t, x_0) = \frac{2L}{\int_{-L}^L e^{\Psi(t) \Upsilon^0(y)} dy} e^{\Psi(t) \Upsilon^0(x_0)}.$$

Il vient donc :

$$\begin{aligned} \partial_t \Theta(t, x_0) &= 2L \psi(t) \frac{\int_{-L}^{x_0} \Upsilon^0(y) e^{\Psi(t) \Upsilon^0(y)} dy}{\int_{-L}^L e^{\Psi(t) \Upsilon^0(y)} dy} \\ &\quad - 2L \psi(t) \frac{\int_{-L}^{x_0} e^{\Psi(t) \Upsilon^0(y)} dy}{\int_{-L}^L e^{\Psi(t) \Upsilon^0(y)} dy} \frac{\int_{-L}^L \Upsilon^0(y) e^{\Psi(t) \Upsilon^0(y)} dy}{\int_{-L}^L e^{\Psi(t) \Upsilon^0(y)} dy}, \\ &= \psi(t) \left[\int_{-L}^{x_0} \Upsilon^0(y) \partial_{x_0} \Theta(t, y) dy - (\Theta(t, x_0) + L) \mu(t) \right], \\ &= \psi(t) \left[\int_{-L}^{\Theta(t, x_0)} \Upsilon^0(\Theta_t^{-1}(x)) dx - (\Theta(t, x_0) + L) \mu(t) \right], \\ &= \mathcal{U}(t, \Theta(t, x_0)). \end{aligned} \quad (\text{Th.3.4.iii})$$

On a utilisé ici (Th.3.3.v) pour μ et le changement de variables (Th.3.4.i). On retrouve donc l'équation caractéristique $\partial_t \Theta = \mathcal{U}(t, \Theta)$ dont on prouve l'existence d'une solution bien que \mathcal{U} ne soit pas assez régulier pour appliquer le théorème de *Cauchy-Lipschitz*. En effet, ici, $\mathcal{U} \in L^\infty([0, \mathcal{T}], W^{1, \infty}(-L, L))$.

On introduit ensuite la notation :

$$\mathcal{A}(\mathcal{Y}) := \iint_{\Omega_{\mathcal{T}}} \mathcal{Y} [\partial_t \varphi + \mathcal{U} \partial_x \varphi](t, x) dt dx.$$

Par le changement de variables (Th.3.4.i), il vient :

$$\mathcal{A}(\mathcal{Y}) = \iint_{\Omega_{\mathcal{T}}} \Upsilon^0(x_0) [\partial_t \varphi + \mathcal{U} \partial_x \varphi](t, \Theta(t, x_0)) \partial_{x_0} \Theta(t, x_0) dt dx_0.$$

On justifie les calculs suivants par des arguments de régularité. On remarque que $(t, x_0) \mapsto \varphi(t, \Theta(t, x_0))$ appartient à l'espace $\mathcal{C}^1([0, \mathcal{T}], \mathcal{C}^0(-L, L))$, ce qui légitime l'égalité au sens fort :

$$\frac{d}{dt} [\varphi(t, \Theta(t, x_0))] = [\partial_t \varphi + \partial_t \Theta(t, x_0) \partial_x \varphi] (t, \Theta(t, x_0)).$$

Grâce à (Th.3.4.iii), on en déduit :

$$\mathcal{A}(\mathcal{Y}) = \int_{-L}^L Y^0(x_0) \int_0^{\mathcal{T}} \frac{d}{dt} [\varphi(t, \Theta(t, x_0))] \partial_{x_0} \Theta(t, x_0) dt dx_0.$$

De même, $(t, x_0) \mapsto \partial_{x_0} \Theta(t, x_0) \in \mathcal{C}^1([0, \mathcal{T}], L^\infty(-L, L))$, ce qui permet d'écrire :

$$\frac{d}{dt} [\varphi(t, \Theta(t, x_0))] \partial_{x_0} \Theta(t, x_0) = \frac{d}{dt} [\varphi(t, \Theta(t, x_0)) \partial_{x_0} \Theta(t, x_0)] - \varphi(t, \Theta(t, x_0)) \partial_t \partial_{x_0} \Theta(t, x_0).$$

D'où :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathcal{Y}) &= \int_{-L}^L Y^0(x_0) \left[\overbrace{\varphi(\mathcal{T}, \Theta(\mathcal{T}, x_0))}^{=0} \partial_{x_0} \Theta(\mathcal{T}, x_0) - \varphi(0, x_0) \overbrace{\partial_{x_0} \Theta(0, x_0)}^{=1} \right] dx_0 \\ &\quad - \int_{-L}^L Y^0(x_0) \int_0^{\mathcal{T}} \varphi(t, \Theta(t, x_0)) \partial_t \partial_{x_0} \Theta(t, x_0) dt dx_0. \end{aligned}$$

Afin d'évaluer le terme $\partial_t \partial_{x_0} \Theta$, on dérive l'expression (3.29) par rapport à x_0 puis à t , ce qui permet d'aboutir à l'identité¹² $\partial_t \partial_{x_0} \Theta = \partial_x \mathcal{U}(t, \Theta) \cdot \partial_{x_0} \Theta$. On obtient donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathcal{Y}) &= - \int_{-L}^L Y^0(x_0) \varphi(0, x_0) dx_0 \\ &\quad - \int_{-L}^L \int_0^{\mathcal{T}} Y^0(x_0) (\varphi \partial_x \mathcal{U})(t, \Theta(t, x_0)) \partial_{x_0} \Theta(t, x_0) dt dx_0. \end{aligned}$$

En appliquant cette fois-ci le changement de variables (Th.3.4.i) dans l'autre sens, on aboutit au résultat souhaité, équivalent à (Th.3.4.ii) :

$$\mathcal{A}(\mathcal{Y}) = - \int_{-L}^L Y^0(x_0) \varphi(0, x_0) dx_0 - \iint_{\Omega_{\mathcal{T}}} \psi(t) \mathcal{Y}(t, x) \varphi(t, x) (\mathcal{Y}(t, x) - \mu(t)) dt dx.$$

\mathcal{Y} est donc bien une solution du modèle ABV sur tout intervalle $[0, \mathcal{T}]$, $\mathcal{T} > 0$. ■

Analyse du théorème 3.4

Le **théorème 3.4** est avant tout un **résultat d'existence de solutions faibles** pour toute donnée initiale bornée. Car si la méthode des caractéristiques fournit une solution pour les équations d'advection linéaire à champ de vitesse donné, elle ne permettrait *a priori* pas ici de conclure (en particulier dans le cas non régulier où elle n'a pas de légitimité). En effet, l'équation d'advection apparaissant dans le modèle ABV est non linéaire, car le champ de vitesse dépend de la solution elle-même (comme par exemple pour l'équation de Burgers), ce qui signifie que pour « remonter » les courbes caractéristiques, il est nécessaire de connaître ... la solution. La force de ce résultat tient au fait que, *a posteriori*, l'expression du jacobien est indépendante de Y_ε , ce qui permet d'obtenir un flot fonction uniquement des données $[Y_\varepsilon^0, \psi, L]$.

¹² Pour Y^0 suffisamment régulier, on peut appliquer le lemme de *Schwarz* afin de permuter les deux dérivées $\partial_{t, x_0}^2 \Theta = \partial_{x_0, t}^2 \Theta$, et on retrouve l'équation du jacobien en dérivant (Th.3.4.iii) par rapport à x_0 .

Un des buts de l'analyse du modèle ABV est de caractériser l'équilibre entre les propriétés hyperboliques et elliptiques. Ce résultat apporte un élément de réponse. On a vu par exemple que, dans le cas d'une bulle (cf. § 3.2.2), le domaine mobile sur lequel la solution est égale à 1 se propage à vitesse finie (il ne peut atteindre le bord en temps fini). De plus, la solution obtenue reste discontinue. En ce qui concerne les équations hyperboliques linéaires, on parle de propriété de vitesse de propagation finie, dans la mesure où le domaine de dépendance de la solution est borné (voire réduit à un point, à savoir le pied de la caractéristique dont le point courant est issu). L'expression du flot (3.29) montre qu'ici **les courbes caractéristiques requiert les valeurs de la donnée initiale dans sa globalité** à travers les intégrales. On observe donc un phénomène de dépendance globale, propre aux équations elliptiques. Cependant, il n'y a pas de régularisation instantanée comme on peut l'observer sur l'équation de la chaleur. On retrouve ainsi des propriétés propres à chacune des deux équations qui composent le modèle.

Cas particuliers

Si le **théorème 3.4** fournit un résultat d'existence, il n'y est toutefois pas question d'unicité. Cependant, pour $Y^0 \in W^{1,\infty}(-L, L)$, on vérifie que le flot est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme sur $[-L, L]$. D'où $\Theta_t^{-1} \in \mathcal{C}^0([0, \mathcal{T}], \mathcal{C}^1(-L, L))$ pour tout $\mathcal{T} > 0$. On a donc $\mathcal{Y} \in \mathcal{Z}_{\mathcal{T}}(-L, L)$. Par le **lemme 3.4**, cette solution est alors unique.

Cette solution étant donnée, le point délicat demeure l'inversion de la fonction Θ . En premier lieu, l'expression (3.29) montre que, **s'il existe $t_0 > 0$ tel que $\Psi(t_0) = 0$** , alors $\Theta(t_0, x_0) = x_0 = \Theta_{t_0}^{-1}(x_0)$ et **on retrouve la configuration initiale Y^0** . Cela inclut le cas où Ψ est périodique (i.e. ψ périodique de moyenne nulle sur sa période), ce qui entraîne la périodicité (en temps) du flot et donc de la solution.

Remarquons ensuite que **pour Y^0 paire, le flot $\Theta(t, \cdot)$ est impair**. En effet :

$$\begin{aligned} \Theta(t, -x) &= 2L \frac{\int_{-L}^{-x} \exp[\Psi(t)Y^0(y)] dy}{\int_{-L}^L \exp[\Psi(t)Y^0(y)] dy} - L = L - 2L \frac{\int_{-x}^L \exp[\Psi(t)Y^0(y)] dy}{\int_{-L}^L \exp[\Psi(t)Y^0(y)] dy}, \\ &= L - 2L \frac{\int_{-L}^x \exp[\Psi(t)Y^0(y)] dy}{\int_{-L}^L \exp[\Psi(t)Y^0(y)] dy} = -\Theta(t, x), \end{aligned}$$

par parité de Y^0 . Ceci justifie que \mathcal{Y} est paire, comme préconisé par le **lemme 3.7**.

Par ailleurs, dans le cas $Y^0 = \mathbf{1}_{[\alpha_0, \beta_0]}$, on retrouve le résultat de la **proposition 3.1**. En effet, on a :

$$\Theta(t, x_0) = -L + \frac{2L}{2L + (\beta_0 - \alpha_0)(e^{\Psi(t)} - 1)} \times \begin{cases} x_0 + L, & \text{si } x_0 \in [-L, \alpha_0[, \\ L + \alpha_0 + (x_0 - \alpha_0)e^{\Psi(t)}, & \text{si } x_0 \in [\alpha_0, \beta_0], \\ L + x_0 + (\beta_0 - \alpha_0)(e^{\Psi(t)} - 1), & \text{si } x_0 \in]\beta_0, L]. \end{cases}$$

On voit sur la figure 3.7a que les courbes caractéristiques recouvrent le domaine (t, x_0) . On peut alors inverser $\Theta(t, \cdot)$:

$$\Theta_t^{-1}(x) = \begin{cases} \left(2L + (\beta_0 - \alpha_0)(e^{\Psi(t)} - 1)\right) \frac{x+L}{2L} - L, & x \in [0, \alpha(t)[, \\ \left[\left(2L + (\beta_0 - \alpha_0)(e^{\Psi(t)} - 1)\right) \frac{x+L}{2L} - L - \alpha_0\right] e^{-\Psi(t)} + \alpha_0, & x \in [\alpha(t), \beta(t)], \\ \left(2L + (\beta_0 - \alpha_0)(e^{\Psi(t)} - 1)\right) \frac{x-L}{2L} + L, & x \in]\beta(t), L], \end{cases}$$

avec $\alpha(t) = \Theta(t, \alpha_0)$ et $\beta(t) = \Theta(t, \beta_0)$, ce qui conduit bien à la solution $\mathbf{1}_{[\alpha(t), \beta(t)]}(x)$ de la **proposition 3.1**. Même si cela ne prouve pas l'unicité de cette solution faible, on remarque que celle-ci a été obtenue par deux méthodes distinctes.

À titre d'exemple, on peut expliciter le flot associé à une condition initiale simulant l'évolution de deux bulles. On se donne quatre réels $-L < \alpha_0 < \beta_0 < \gamma_0 < \delta_0 < L$ tels que $\delta_0 - \gamma_0 > \beta_0 - \alpha_0$, ce qui revient à considérer la seconde bulle plus grande que la première. Les caractéristiques issues de chacun de ces quatre points s'écrivent respectivement, en notant $\mathcal{V}_0 := \delta_0 - \gamma_0 + \beta_0 - \alpha_0$:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \frac{2L(L + \alpha_0)}{2L - \mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_0 e^{\Psi(t)}} - L, \\ \beta(t) &= \frac{2L(L + \alpha_0 + (\beta_0 - \alpha_0)e^{\Psi(t)})}{2L - \mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_0 e^{\Psi(t)}} - L, \\ \gamma(t) &= \frac{2L(L + \alpha_0 + (\beta_0 - \alpha_0)e^{\Psi(t)} + \gamma_0 - \beta_0)}{2L - \mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_0 e^{\Psi(t)}} - L, \\ \delta(t) &= \frac{2L(L + \alpha_0 + (\beta_0 - \alpha_0)e^{\Psi(t)} + \gamma_0 - \beta_0 + (\delta_0 - \gamma_0)e^{\Psi(t)})}{2L - \mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_0 e^{\Psi(t)}} - L. \end{aligned}$$

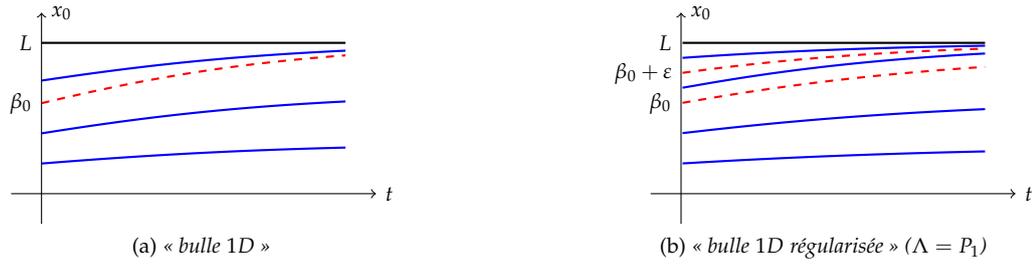
On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1(t) &:= \beta(t) - \alpha(t) = \frac{2L(\beta_0 - \alpha_0)e^{\Psi(t)}}{2L - \mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_0 e^{\Psi(t)}} > 0, \\ \mathcal{V}_2(t) &:= \delta(t) - \gamma(t) = \frac{2L(\delta_0 - \gamma_0)e^{\Psi(t)}}{2L - \mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_0 e^{\Psi(t)}} > 0, \\ \gamma(t) - \beta(t) &= \frac{2L(\gamma_0 - \beta_0)}{2L - \mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_0 e^{\Psi(t)}} > 0. \end{aligned}$$

La dernière inégalité montre que les deux bulles ne peuvent se toucher, tandis que les deux premières assurent que les deux bulles ne disparaissent pas. Les conclusions sont donc analogues au cas d'une seule bulle.

Pour ce qui est des régularisations polynomiales, seule la fonction $\Lambda = P_1$ permet d'inverser explicitement le flot (cf. FIG. 3.7b). On a vu que lorsque $\Psi(t_0) = 0$, on a $\Theta(t_0, \cdot) = \text{Id}$. Pour t tel que $\Psi(t) \neq 0$, on a, d'après (3.21) :

$$\Delta_\varepsilon(t) := \frac{1}{2} \int_{-L}^L \exp \left[\Psi(t) \Upsilon_\varepsilon^0(x) \right] dx = L - \beta_0 - \varepsilon + \beta_0 e^{\Psi(t)} + \varepsilon \frac{e^{\Psi(t)} - 1}{\Psi(t)}.$$


 FIG. 3.7 – Courbes caractéristiques pour les cas tests « bulle 1D » ($L = 1$, $\beta_0 = 0.6$, $\psi(t) = 1$, $\varepsilon = 0.2$)

D'où :

$$\Theta(t, x) = \begin{cases} x \frac{L e^{\Psi(t)}}{\Delta_\varepsilon(t)}, & x \in [0, \beta_0[, \\ \frac{L}{\Delta_\varepsilon(t)} \left[\varepsilon \frac{e^{\Psi(t)} - e^{\Psi(t) \frac{\beta_0 + \varepsilon - x}{\varepsilon}}}{\Psi(t)} + \beta_0 e^{\Psi(t)} \right], & x \in [\beta_0, \beta_0 + \varepsilon], \\ L - \frac{L(L-x)}{\Delta_\varepsilon(t)}, & x \in]\beta_0 + \varepsilon, L]. \end{cases}$$

On complète par (im)parité. Puis :

$$\Theta_t^{-1}(x) = \begin{cases} \Delta_\varepsilon(t) e^{-\Psi(t) \frac{x}{L}}, & x \in [0, \beta_\varepsilon(t)[, \\ \beta_0 + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\Psi(t)} \ln \left[e^{\Psi(t)} + \frac{\Psi(t)}{\varepsilon} \left[\beta_0 e^{\Psi(t)} - \Delta_\varepsilon(t) \frac{x}{L} \right] \right], & x \in [\beta_\varepsilon(t), \delta_\varepsilon(t)], \\ L - \Delta_\varepsilon(t) \left[1 - \frac{x}{L} \right], & x \in]\delta_\varepsilon(t), L], \end{cases}$$

avec β_ε et δ_ε donnés par (3.26). La¹³ solution Y_ε avec $\Lambda = P_1$ résulte ensuite de la composition de Y_ε^0 et de Θ_t^{-1} .

3.3 EXTENSION AU CAS RADIAL EN 2D ET 3D

Comme dans le cas de la dimension 1, on détermine dans le cas radial une solution lorsque la donnée initiale est une bulle, représentée par la fonction indicatrice d'un disque (resp. d'une sphère en dimension 3). Le domaine d'étude est ici le disque $\Omega = \mathcal{B}(0, R) \subset \mathbb{R}^2$ et on se place en coordonnées polaires (r, θ) . Le système se réécrit donc sous la forme :

$$\begin{cases} \partial_t Y + \partial_r Y \cdot \partial_r \phi + \frac{1}{r^2} \partial_\theta Y \cdot \partial_\theta \phi = 0, \\ Y(t=0, \cdot, \cdot) = Y^0, \\ \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r \phi) + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 \phi = \psi(t) \left(Y - \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R Y(t, r', \theta') r' dr' d\theta' \right), \\ \partial_r \phi(t, r=R, \theta) = 0, \end{cases} \quad (3.30)$$

avec :

$$Y^0(r) = \mathbf{1}_{[0, \rho_0]}(r), \quad \text{pour } \rho_0 \in]0, R[.$$

¹³ Pour $\Lambda \in P_1$, on a $Y_\varepsilon^0 \in W^{1,\infty}(-L, L)$ et on vérifie que $Y_\varepsilon \in \mathcal{Z}_{\mathcal{D}}(-L, L)$, espace dans lequel on a prouvé l'unicité des solutions.

Dans ce qui suit, on cherche à construire des **solutions radiales** (Y, ϕ) **du système précédent**, *i.e.* fonctions uniquement du temps t et du rayon r , ce qui permet de se rapprocher du cas en dimension 1. Le système précédent se simplifie alors en :

$$\begin{cases} \partial_t Y + \partial_r Y \cdot \partial_r \phi = 0, \\ Y(t=0, \cdot) = Y^0, \\ \partial_r (r \partial_r \phi) = r \psi(t) \left(Y(t, r) - \frac{2}{R^2} \int_0^R Y(t, r') r' dr' \right), \\ \partial_r \phi(\cdot, R) = 0. \end{cases} \quad (3.31)$$

S'il existe une fonction $\rho : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant $\rho(0) = \rho_0$ et telle que :

$$Y(t, r) = \mathbf{1}_{[0, \rho(t)]}(r),$$

alors la moyenne μ de Y vaut :

$$\mu(t) = \frac{2}{R^2} \int_0^{\rho(t)} r dr = \frac{\rho^2(t)}{R^2}.$$

Par ailleurs, en vertu du **théorème 3.3**, on a :

$$\mu(t) = \frac{\int_0^{\rho_0} e^{\Psi(t)} r dr}{\int_0^{\rho_0} e^{\Psi(t)} r dr + \int_{\rho_0}^R r dr} = \frac{\rho_0^2 e^{\Psi(t)}}{\rho_0^2 e^{\Psi(t)} + R^2 - \rho_0^2}.$$

Par comparaison des deux expressions de μ , on conclut que la seule fonction ρ solution est donnée par :

$$\rho(t) = \frac{\rho_0 R e^{\Psi(t)/2}}{\sqrt{\rho_0^2 e^{\Psi(t)} + R^2 - \rho_0^2}}. \quad (3.32)$$

La fonction ρ est alors de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ . On vérifie à l'aide de formules de saut que, réciproquement, la fonction $\mathbf{1}_{[0, \rho(t)]}(r)$ avec ρ donnée par (3.32) est bien une solution faible (globale) de (3.31) et plus généralement de (3.30) pour une donnée initiale radiale.

On peut retrouver ce résultat de différentes manières. On a, au sens des distributions :

$$\begin{cases} \partial_t (\mathbf{1}_{r \leq \rho(t)}) = \rho'(t) \delta_{r=\rho(t)}, \\ \partial_r (\mathbf{1}_{r \leq \rho(t)}) = -\delta_{r=\rho(t)}. \end{cases}$$

En intégrant l'équation sur ϕ entre r et R , on a :

$$-\partial_r \phi = -\psi(t) \left[\frac{\rho^2(t)}{r} \frac{R^2 - \rho^2(t)}{R^2} - \frac{\rho^2(t) - r^2}{2r} \mathbf{1}_{[0, \rho(t)]}(r) \right].$$

En injectant les dernières égalités dans l'équation de transport, il vient :

$$\rho'(t) = \psi(t) \rho(t) \left(1 - \frac{\rho^2(t)}{R^2} \right).$$

La fonction $q = \rho/R$ est donc solution de :

$$q' = \psi q(1 - q^2).$$

On a $q(0) \in [0, 1]$. Si $q = 0$ (resp. 1), la solution triviale est $q(t) = 0$ (resp. 1) d'après *Cauchy-Lipschitz*. Sinon, $q(t) \in]0, 1[$ et l'EDO s'écrit :

$$\psi = \frac{q'}{q} - \frac{1}{2} \cdot \frac{-2qq'}{1 - q^2} = \left[\ln \left(\frac{q}{\sqrt{1 - q^2}} \right) \right]'$$

On déduit, après intégration, que :

$$q^2(t) = \frac{q(0)^2 \exp \Psi(t)}{1 - q(0)^2 + q(0)^2 \exp \Psi(t)},$$

ce qui redonne bien (3.32). On aurait également pu démontrer ce résultat en utilisant l'égalité faible [66, Annexe 1] :

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty([0, \mathcal{T}[\times]0, R]),$$

$$\int_0^{\mathcal{T}} \int_0^R Y \left[\partial_t \varphi + \partial_r \varphi \cdot \partial_r \varphi + \psi(t) \varphi \left(Y - \frac{2}{R^2} \int_0^R Y(t, r') r' dr' \right) \right] r dr dt + \int_0^{\rho_0} \varphi(0, r) r dr = 0.$$

La formule (3.32) est la généralisation en dimension 2 de (3.19b) (qui donne l'expression de la fonction β) dans le cas symétrique. Le même calcul en dimension 3 confirme cette généralisation, qui s'écrit donc en dimensions 1, 2 et 3 :

$$\rho(t) = \frac{\rho_0 R e^{\Psi(t)/d}}{\sqrt[d]{\rho_0^d e^{\Psi(t)} + R^d - \rho_0^d}}.$$

Les raisonnements de la partie 1D peuvent de même être étendus au cas radial, où, par le biais de la méthode des caractéristiques, on établit des propriétés qualitatives sur les solutions.

À titre d'exemple, on sait que les caractéristiques sont définies de manière générale par :

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{X}}{d\tau} = \nabla \phi(\tau, \mathcal{X}(\tau)), \\ \mathcal{X}(0) = x_0. \end{cases}$$

En coordonnées radiales, avec $\mathcal{X}(\tau) = \rho(\tau)e_r(\theta(\tau))$ et $\nabla\phi = (\partial_r\phi, r^{-1}\partial_\theta\phi)$, l'EDO se réécrit :

$$\begin{cases} \rho'(\tau) = \partial_r\phi(\tau, \rho(\tau), \theta(\tau)), \\ \theta'(\tau) = \frac{1}{\rho^2(\tau)}\partial_\theta\phi(\tau, \rho(\tau), \theta(\tau)), \\ \rho(0) = \rho_0, \theta(0) = \theta_0. \end{cases} \quad (3.33)$$

Ici, $\rho_0 \neq 0$. Par ailleurs, la relation (3.27) établie dans l'étude 1D et donnant le jacobien demeure vraie en dimension supérieure :

$$\det \nabla_{x_0}\mathcal{X} = \frac{\exp[\Psi(t)Y^0(x_0)]}{\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \exp[\Psi(t)Y^0(x)] dx}.$$

Ici, dans le repère $(e_r(\theta_0), e_\theta(\theta_0))$, on a :

$$\mathcal{X}(\tau) = \begin{pmatrix} \rho(\tau; \rho_0, \theta_0) \cos(\theta(\tau; \rho_0, \theta_0) - \theta_0) \\ \rho(\tau; \rho_0, \theta_0) \sin(\theta(\tau; \rho_0, \theta_0) - \theta_0) \end{pmatrix}.$$

D'où, avec $\partial_\theta(e_r(\theta)) = e_\theta(\theta)$:

$$\nabla_{\rho_0, \theta_0}\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \partial_{\rho_0}\mathcal{X} & \frac{1}{\rho_0}\partial_{\theta_0}\mathcal{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\partial_{\rho_0}\rho - s\rho\partial_{\rho_0}\theta & c\frac{\partial_{\theta_0}\rho}{\rho_0} - s\rho\frac{\partial_{\theta_0}\theta}{\rho_0} \\ s\partial_{\rho_0}\rho + c\rho\partial_{\rho_0}\theta & s\frac{\partial_{\theta_0}\rho}{\rho_0} + c\rho\frac{\partial_{\theta_0}\theta}{\rho_0} \end{pmatrix},$$

avec $c = \cos(\theta - \theta_0)$ et $s = \sin(\theta - \theta_0)$.

Dans le cas qui nous concerne, à savoir celui de la géométrie radiale ($Y^0 = Y^0(r)$), ϕ n'est fonction que de r . Il vient alors $\theta(\tau) = \theta_0$ et :

$$\nabla_{\rho_0, \theta_0}\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \partial_{\rho_0}\rho & 0 \\ 0 & \frac{\rho}{\rho_0} \end{pmatrix}.$$

L'équation du jacobien devient donc :

$$\frac{1}{2}\partial_{\rho_0}(\rho^2) = \frac{\rho_0 \exp[\Psi(t)Y^0(\rho_0)]}{\frac{2}{R^2} \int_0^R \exp[\Psi(t)Y^0(r)] r dr},$$

ce dont on déduit :

$$\rho^2(\tau; \rho_0) = R^2 \left[1 - \frac{\int_{\rho_0}^R \exp[\Psi(t)Y^0(r)] r dr}{\int_0^R \exp[\Psi(t)Y^0(r)] r dr} \right] = R^2 \frac{\int_0^{\rho_0} \exp[\Psi(t)Y^0(r)] r dr}{\int_0^R \exp[\Psi(t)Y^0(r)] r dr}.$$

On a utilisé le fait que la solution de $\rho'(\tau) = \partial_r\phi(\tau, \rho(\tau))$, $\rho(0) = R$, est simplement $\rho(\tau) = R$, compte-tenu de la condition aux limites $\partial_r\phi(t, R) = 0$.

La fonction ρ^2 ainsi définie est nulle en $\rho_0 = 0$ (par prolongement par continuité, l'expression ayant été obtenue sous l'hypothèse $\rho_0 \neq 0$), croissante par rapport à ρ_0 (donc positive). La fonction $\rho = \sqrt{\rho^2}$ est ainsi bien définie, continue et croissante sur $[0, R]$, et donc inversible, d'inverse $\rho_t^{-1}(r)$. La fonction $(t, r) \mapsto Y^0(\rho_t^{-1}(r))$ est solution du système (3.31). On obtient ainsi une formule analogue à celle qui a été explicitée dans le **théorème 3.4**. Les mêmes conclusions peuvent alors être émises.

Dans le cas général à donnée initiale quelconque pour le système (3.30), la méthode requiert de résoudre (3.33), pour lequel il n'existe pas *a priori* de solutions explicites. Toutefois, on peut utiliser ce système d'EDOs dans des perspectives numériques.

3.4 CONCLUSION

Le modèle ABV a été construit à partir du système DLMN en se basant sur des considérations mathématiques (vitesse potentielle, changement de second membre, découplage avec la thermodynamique). En tant que système d'équations aux dérivées partielles, le modèle a de nombreuses propriétés, dont certaines ont été détaillées dans ce chapitre. En particulier, on a prouvé l'existence de solutions régulières en temps court, avec une estimation du temps d'existence. De plus, pour le cas de la dimension 1 ou de la dimension 2 à données radiales, on obtient non seulement des solutions classiques globales en temps, mais on explicite également des solutions faibles, elles aussi globales en temps. Au regard de ces solutions faibles, on constate que, pour une donnée initiale de type « bulle » (fonction à valeurs dans $\{0, 1\}$), il existe une solution de type « bulle ». On est ainsi conforté dans le choix de ce modèle qui, bien que simplifié, possède des caractéristiques souhaitées (principe du maximum, symétrie). Enfin, on a démontré l'existence d'une fonction définie sur \mathbb{R}_+ et égale, sur son intervalle d'existence, à la moyenne sur Ω de la solution. On connaît donc explicitement la moyenne des solutions, qui ne dépend que de la condition initiale et de la pulsation. Cela permet d'envisager deux conjectures : la première est qu'il y a unicité des solutions faibles (puisque la moyenne est définie de manière univoque), la seconde est que les solutions sont globales en temps (la fonction moyenne est définie pour tout temps), et ce, quel que soit le type de solutions considérées (faibles, fortes, classiques).

Parmi les problèmes ouverts, il demeure donc en premier lieu la question du temps d'existence des solutions classiques. Car si une estimation précise a été donnée, cette dernière s'avère non optimale en dimension 1 : le temps d'existence y est infini, ce que semblent confirmer les simulations numériques (en dimensions 1 et 2) qui ne montrent pas d'explosion en temps fini. Par ailleurs, il reste à démontrer l'existence (sauf en dimension 1 où on dispose de solutions explicites) et l'unicité (quelle que soit la dimension) de solutions faibles au modèle ABV. Ce point est d'autant plus important qu'il correspond à la finalité de cette étude, à savoir le traitement de données en créneau. Pour cela, une technique qui pourrait s'avérer instructive est celle de l'approximation parabolique, comme ce qui est fait par exemple dans [70].

Finalement, l'étude du modèle ABV constitue un excellent point de départ, du point de vue théorique, pour l'analyse numérique du système $DLMN$. Elle a permis de tester les outils fonctionnels dans les espaces de Sobolev (inégalités de *Moser*, estimations d'énergie) au cours de la preuve du théorème d'existence et d'unicité, et de mieux comprendre le fonctionnement global du couplage hyperbolique / elliptique. Afin de « remonter » vers le système $DLMN$, il est envisageable d'enrichir progressivement ce modèle abstrait, par l'ajout d'un terme source, puis par le couplage avec des équations thermodynamiques.

INTERFACES ET SIMULATIONS NUMÉRIQUES DU MODÈLE ABV

SOMMAIRE

4.1	INTRODUCTION À LA PROBLÉMATIQUE DE LA SIMULATION D'INTERFACES	125
4.1.1	Suivi d'interfaces	125
4.1.2	Capture d'interfaces	125
4.2	TRANSPORT DE FONCTIONS IRRÉGULIÈRES : LE SCHÉMA DL	127
4.3	TRANSPORT DE FONCTIONS RÉGULIÈRES : LE SCHÉMA MOC ₂	129
4.3.1	Notations	130
4.3.2	Construction du schéma	132
4.3.3	Étude séparée des deux schémas	138
4.3.4	Traitement du phénomène de dispersion : combinaison des deux schémas	144
4.3.5	Simulations numériques	151
4.4	RAFFINEMENT ADAPTATIF DE MAILLAGES	164
4.4.1	Motivations	164
4.4.2	Rappels sur les algorithmes AMR	164
4.4.3	Adaptation à la résolution de l'équation de transport	167
4.4.4	Simulations du modèle ABV	170
4.5	UN ALGORITHME POUR LES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES INCOMPRESSIBLE : LE SCHÉMA MAC	171
4.6	BILAN	174

SES ÉCOULEMENTS qui interviennent dans les cœurs de réacteurs nucléaires peuvent être qualifiés de complexes dans la mesure où la disparité des échelles d'espace est très grande. À titre d'exemple, on peut comparer la taille du réacteur (plusieurs mètres) à celle des plus petites bulles (de l'ordre de quelques microns). Du point de vue numérique, les algorithmes ne peuvent tenir compte de toutes ces échelles, pour des questions de coût de calcul. Avec l'accroissement des puissances des ordinateurs, il devient aujourd'hui possible de **prendre en compte (localement) les plus petites échelles**. Cela définit le cadre (ambitieux) de la *Simulation Numérique Directe* (SND¹). La

¹ L'acronyme DNS (pour *Direct Numerical Simulation*) est passé dans le langage courant (des numériciens) en français.

SND est devenue un enjeu majeur dans le monde de la modélisation en dynamique des fluides, car sa maîtrise permettra, à terme, de mieux connaître et ainsi de mieux comprendre les phénomènes physiques qui se produisent durant une expérience, que ce soit dans le domaine de la combustion, de l'aérodynamique ou encore de la thermodynamique diphasique.

De manière générale, les écoulements diphasiques peuvent être considérés soit comme des milieux continus, lorsque les deux phases sont potentiellement présentes en chaque point du domaine (les variables sont alors moyennées), soit comme des milieux distincts, lorsque les phases sont séparées par une interface infiniment mince. Dans ce dernier cas (qui englobe les écoulements à bulles), les deux phases peuvent être assimilées à deux fluides distincts supposés non-miscibles. C'est le choix de modélisation qui est fait ici. En termes d'équations, ce choix peut se traduire par deux types de formulations (équivalentes) : soit on utilise deux ensembles distincts d'équations, propres à chacun des deux fluides (on complète alors le modèle par des conditions de transmission à la traversée de l'interface), soit on prend en compte un unique ensemble d'équations, faisant intervenir des variables « globales » ainsi que des termes sources supplémentaires (de type Dirac sur l'interface, modélisant par exemple la tension de surface).

Mais quelle que soit la formulation choisie et en dépit des performances accrues des ordinateurs, la simulation des écoulements à bulles demeure problématique pour plusieurs raisons : en premier lieu parce que certains phénomènes physiques inhérents au concept de bulles engendrent des changements topologiques importants, comme par exemple en cas de formation de bulles par changement de phases (nucléation), de coalescence ou encore de fragmentation ; en second lieu parce que l'interface est infiniment mince, ce qui requiert un traitement numérique « parfait », *i.e.* sans diffusion (laquelle aurait tendance à transformer une interface infiniment mince en interface diffuse et rendrait de surcroît délicat le calcul de forces surfaciques). La gestion rigoureuse de ces différents points, en plus de la prise en compte d'échelles d'espace très petites dans le cadre de la SND, peut alors engendrer des coûts de calcul prohibitifs.

Dans ce chapitre, on décrit tout d'abord brièvement les méthodes les plus classiques pour le traitement numérique des interfaces. On s'intéresse ensuite plus particulièrement aux schémas numériques dédiés au transport d'interface. On construit alors un schéma d'ordre 2, basé sur la méthode des caractéristiques, pour traiter le cas des interfaces régulières.² Puis, on présente un algorithme de raffinement adaptatif de maillages (AMR³) en dimension supérieure à 1, appliqué au modèle simplifié de déformation de bulles (ABV). Dans l'optique de traiter le système complet (DLMN) à l'aide de cette technique, on termine le chapitre par des rappels sur l'algorithme MAC.

² On opposera dans la suite le concept d'interfaces régulières (diffuses) à celui d'interfaces irrégulières (infiniment minces).

³ Comme pour l'acronyme DNS, le terme anglais (*Adaptive Mesh Refinement*) est le plus utilisé, même en français.

4.1 INTRODUCTION À LA PROBLÉMATIQUE DE LA SIMULATION D'INTERFACES

On distingue globalement deux grandes familles de méthodes pour traiter les interfaces : soit l'interface est elle-même une inconnue à part entière que l'on suit au cours du temps (on ajoute alors une ou plusieurs équations au système), soit elle est implicitement contenue dans le modèle et est déduite de la position des deux fluides. En d'autres termes, soit on suit l'interface (on parle alors de *front/interface tracking*), soit on la capture à chaque pas de temps (on parle de méthode *interface capturing*). Dans ce dernier cas, il peut y avoir reconstruction de l'interface (VOF) ou non (comme dans les méthodes que nous allons détailler).

4.1.1 Suivi d'interfaces

Dans la méthode dite de *front tracking* introduite par Unverdi et Tryggvason [88] puis approfondie dans [87], les équations régissant l'écoulement sont résolues par une méthode classique (volumes finis, différences finies) sur un maillage fixe (en coordonnées eulériennes), tandis que la frontière séparant les deux fluides est représentée par un ensemble de marqueurs reliés entre eux (appelé *front*). L'évolution de ces marqueurs est traitée grâce à une approche lagrangienne, les particules étant suivies au cours du mouvement. Cela nécessite toutefois des interpolations entre les maillages fixe et mobile, et une gestion rigoureuse des changements de topologie (nucléation, coalescence, fragmentation) qui représentent la principale limite de cette méthode.

Quant à la résolution à proprement parler des équations (loin de l'interface), par exemple les équations de Navier-Stokes, la principale difficulté est d'approcher les termes surfaciques sur l'interface (comme la tension de surface) et d'appréhender les fortes variations des gradients au voisinage de l'interface, en particulier pour la pression.

Les pionniers dans ce domaine furent Harlow et Welsh [47], dont on détaillera la méthode dans le paragraphe 4.5. Dans leur approche, les marqueurs repèrent chacun des deux fluides et non directement l'interface (ce qui requiert donc un nombre plus important de marqueurs que pour la méthode *front tracking* où les marqueurs sont concentrés dans un voisinage de l'interface).

4.1.2 Capture d'interfaces

Cette méthode générale consiste à repérer l'interface *via* l'évolution d'une *fonction couleur*, régulière ou non. Une première méthode est la méthode VOF (*Volume-Of-Fluid*), dont les fondements ont été initiés par Noh et Woodward [62] puis formalisés par Hurt et Nichols [50]. Cet algorithme (ou plutôt cette famille d'algorithmes) est composé de deux étapes :

- ① évaluation de la fraction volumique⁴ de la phase de référence dans chaque cellule du maillage ;
- ② reconstruction de l'interface à partir des valeurs de la fraction volumique.

⁴ On parle parfois de *volume tracking*.

L'algorithme SLIC (*Simple Line Interface Calculation*, [47]) est basé sur l'hypothèse que, dans chaque cellule, l'interface est soit horizontale, soit verticale (en dimension 2). Pour déterminer sa position, on utilise des couples d'indicateurs de présence : pour la phase vapeur par exemple, on détermine les entiers IL_v et IR_v égaux soit à 1 (si la phase vapeur est présente), soit à 0 (sinon), respectivement dans la cellule de gauche et la cellule de droite. Bien que basique, cette méthode s'est révélée très pratique du point de vue numérique. De nombreuses évolutions ont été faites par la suite, avec la formalisation du concept de méthode VOF par Hurt et Nichols [50], puis par Rider et Kothe [75]. Pour ce qui est de l'étape ①, la fraction volumique, qui sert ici de fonction couleur, est solution d'une équation de transport [44, 73]. Pour l'étape ②, la méthode PLIC (*Piecewise Linear Interface Calculation*, [89]) a succédé à la méthode SLIC. La principale difficulté est d'évaluer numériquement la normale à l'interface dans chaque cellule [64]. Une revue des différentes techniques de type VOF est donnée dans [79].

Une autre méthode consiste à utiliser une fonction régulière ϕ , que l'on peut interpréter comme la distance entre chaque point du fluide et l'interface. On parle alors de méthode *level set*, introduite par Osher et Sethian [63]. La fonction distance ϕ est signée (nulle sur l'interface, positive à l'extérieur de la bulle et négative à l'intérieur) et est solution d'une équation d'advection. La fonction caractéristique de la phase vapeur est donc égale à $1 - H(\phi)$, où H est la fonction heaviside.

Cependant, afin d'éviter d'éventuelles instabilités numériques dues au traitement des termes surfaciques, on « régularise » l'interface en introduisant la fonction H_ε (régularisation de la fonction Heaviside), avec $\varepsilon > 0$:

$$H_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -\varepsilon, \\ \frac{1}{2} \left[1 + \frac{x}{\varepsilon} + \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi x}{\varepsilon} \right], & \text{si } |x| \leq \varepsilon, \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Toutefois, le champ de vitesse sur l'interface pouvant être relié à la fonction ϕ elle-même, l'équation d'advection est en réalité une équation d'Hamilton-Jacobi, à laquelle on peut appliquer tous les outils numériques associés à ce type d'équations.

À noter que des couplages entre ces différentes méthodes ont été mis en œuvre, comme par exemple dans [84] (VOF et *level set*).

Une autre possibilité est d'utiliser une des équations du système. Dans le cas du système DLMN, la fraction massique Y_1 de la phase vapeur est discontinue, et est égale à la fonction caractéristique du domaine occupé par la phase. Résoudre l'équation de conservation des masses partielles permet donc de déterminer Y_1 , et ainsi de localiser l'interface, puisque celle-ci coïncide avec la discontinuité de la fonction Y_1 . Mais ce choix nécessite de disposer d'un algorithme très peu diffusif afin de ne pas perdre très rapidement en précision. C'est pourquoi on introduit, dans le paragraphe suivant, l'algorithme anti-diffusif de Després et Lagoutière.

4.2 TRANSPORT DE FONCTIONS IRRÉGULIÈRES : LE SCHÉMA DL

L'idée de ce schéma est de combiner le décentrage amont (conditionnellement stable mais diffusif) et aval (instable mais non diffusif) tout en conservant les avantages numériques des deux approches. Ce schéma a été introduit par Després et Lagoutière [29] et analysé dans [56]. On y fera référence dans la suite comme [schéma DL](#).

Dans tout le paragraphe, on travaille sur un maillage cartésien uniforme (t^n, x_j) du domaine $[0, 1]^2$. Les pas de temps et d'espace sont notés Δt et Δx . On considère dans un premier temps l'équation de transport à vitesse constante $u > 0$:

$$\partial_t Y + u \partial_x Y = \partial_t Y + \partial_x(Yu) = 0,$$

munie de la condition initiale :

$$Y(t = 0, \cdot) = Y^0 \in L^1_{loc}.$$

À l'instar des schémas pour les lois de conservation, le schéma a pour formulation générale :

$$Y_j^{n+1} = Y_j^n - \frac{u\Delta t}{\Delta x} \left(Y_{j+1/2}^n - Y_{j-1/2}^n \right). \quad (4.1a)$$

Le point majeur est donc la définition des flux aux interfaces. On requiert, pour le choix des flux, que ces derniers réalisent les conditions suivantes :

$$m_{j-1/2}^n := \min(Y_j^n, Y_{j-1}^n) \leq Y_j^{n+1} \leq M_{j-1/2}^n := \max(Y_j^n, Y_{j-1}^n), \quad (4.1b)$$

$$m_{j+1/2}^n \leq Y_{j+1/2}^n \leq M_{j+1/2}^n. \quad (4.1c)$$

Le premier critère permet la stabilité L^∞ ainsi que la décroissance de la variation totale :

$$VT^n = \sum_j |Y_{j+1}^n - Y_j^n|.$$

La seconde condition est liée à la consistance du schéma. On cherche donc à déterminer les flux admissibles à partir de ces deux contraintes. En remplaçant Y_j^{n+1} dans (4.1b) par son expression (4.1a), on obtient :

$$Y_{j-1/2}^n + \frac{\Delta x}{u\Delta t} \left(Y_j^n - M_{j-1/2}^n \right) \leq Y_{j+1/2}^n \leq Y_{j-1/2}^n + \frac{\Delta x}{u\Delta t} \left(Y_j^n - m_{j-1/2}^n \right),$$

ce qui fournit un encadrement de $Y_{j+1/2}^n$ en fonction de $Y_{j-1/2}^n$. Pour avoir une majoration explicite, on utilise (4.1c) pour parvenir à la condition *suffisante* :

$$b_j^n := \frac{\Delta x}{u\Delta t} \left(Y_j^n - M_{j-1/2}^n \right) + M_{j-1/2}^n \leq Y_{j+1/2}^n \leq B_j^n := m_{j-1/2}^n + \frac{\Delta x}{u\Delta t} \left(Y_j^n - m_{j-1/2}^n \right). \quad (4.1d)$$

On vérifie en effet que si les encadrements (4.1c-4.1d) sont réalisés, il en est de même pour la condition (4.1b).

De plus, sous l'hypothèse de type CFL :

$$0 < \frac{u\Delta t}{\Delta x} < 1,$$

l'ensemble $[b_j^n, B_j^n] \cap [m_{j+1/2}^n, M_{j+1/2}^n]$ est non vide et il est possible de trouver un flux $Y_{j+1/2}^n$ vérifiant simultanément (4.1c) et (4.1d). Pour déterminer la valeur du flux « optimale » dans l'intervalle considéré, on cherche à allier les caractères stable du schéma décentré amont et anti-dissipatif du schéma décentré aval, *i.e.* à décentrer vers l'aval dès que cela est possible. Pour cela, on résout le problème de minimisation :

$$\min_{\substack{b_j^n \leq \tilde{Y} \leq B_j^n \\ m_{j+1/2}^n \leq \tilde{Y} \leq M_{j+1/2}^n}} \left| \tilde{Y} - Y_{j+1}^n \right|. \quad (4.2)$$

La solution du problème (4.2) est alors donnée par :

$$Y_{j+1/2}^n = \begin{cases} b_j^n, & \text{si } Y_{j+1}^n \leq b_j^n, \\ Y_{j+1}^n, & \text{si } b_j^n < Y_{j+1}^n < B_j^n, \\ B_j^n, & \text{si } Y_{j+1}^n \geq B_j^n, \end{cases} \quad (4.3)$$

soit encore :

$$Y_{j+1/2}^n = Y_j^n + (Y_{j+1}^n - Y_j^n) \max \left[0, \min \left\{ 1, \left(1 - \frac{u\Delta t}{\Delta x} \right) \frac{Y_j^n - Y_{j-1}^n}{Y_{j+1}^n - Y_j^n} \right\} \right].$$

On peut donc réinterpréter cette méthode comme un schéma avec limiteur (qui a pour nom dans la littérature d'*UltraBee*).

Dans le cas où la vitesse est négative, on fait intervenir la cellule en aval dans le calcul des flux, ce qui donne :

$$b_j^n := \frac{\Delta x}{-u\Delta t} (Y_{j+1}^n - M_{j+1/2}^n) + M_{j+1/2}^n.$$

Pour étudier la qualité de la « convergence » du schéma, il est fait appel à la classe de fonctions discrètes $\mathcal{DL}(\kappa)$ définie pour $\kappa \in [0, 1[$ par :

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \begin{cases} f_{3j+1} = f_{3j}, \\ f_{3j+2} = \kappa f_{3j+1} + (1 - \kappa) f_{3j+3}. \end{cases}$$

À la suite (f_j) de $\mathcal{DL}(\kappa)$, on associe la fonction :

$$\tilde{f}(x) = \sum_j f_j \mathbf{1}_{[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}[}(x).$$

Cette classe de fonctions est advectée **de manière exacte** par le schéma décrit précédemment. On a de plus le résultat de densité suivant : si $f \in BV(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, alors il existe $C_{DL} > 0$ indépendante du maillage, $\kappa \in [0, 1[$ et $g \in \mathcal{DL}(\kappa)$ tels que : $\|f - \tilde{g}\|_{L^1} \leq C_{DL} \Delta x$.

Ce schéma a la propriété de ne diffuser que sur un nombre de cellules (1 en 1D, 2 ou 3 en 2D) uniforme en temps et convient parfaitement au traitement des fonctions discontinues.

La méthode s'étend également aux cas où la vitesse n'est pas constante. Si l'on se donne une vitesse $u_{i+1/2}^n$ en chaque nœud du maillage, on applique le schéma (4.3) en considérant la vitesse constante par cellule $]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$, i.e. en prenant par exemple :

$$u_i^n = \frac{u_{i+1/2}^n + u_{i-1/2}^n}{2}.$$

De même, on peut utiliser cette méthode pour des dimensions supérieures. Par exemple, en dimension 2, on procède par « splitting directionnel » en se ramenant à la résolution alternée des équations :

$$\partial_t Y + u_x \partial_x Y = 0 \quad \text{et} \quad \partial_t Y + u_y \partial_y Y = 0,$$

au sens où on utilise le schéma :

$$\begin{cases} Y_{j,k}^{n+1/2} = Y_{j,k}^n - \frac{u_x \Delta t}{\Delta x} (Y_{j+1/2,k}^n - Y_{j-1/2,k}^n), \\ Y_{j,k}^{n+1} = Y_{j,k}^{n+1/2} - \frac{u_y \Delta t}{\Delta y} (Y_{j,k+1/2}^{n+1/2} - Y_{j,k-1/2}^{n+1/2}). \end{cases}$$

4.3 TRANSPORT DE FONCTIONS RÉGULIÈRES : LE SCHÉMA MOC2

L'équation de transport, et plus généralement les opérateurs d'advection, interviennent dans de nombreux domaines d'applications des mathématiques, en particulier dans les systèmes d'EDPs modélisant des écoulements en mécanique des fluides (équations de Navier-Stokes sous forme non conservative, et plus généralement diagonalisation de systèmes hyperboliques [58]). Par ailleurs, comme décrit dans les paragraphes précédents, on utilise l'équation de transport afin de suivre numériquement des interfaces entre fluides non miscibles (transport de fonctions continues dans le cadre des méthodes *Level Set* [63] ou transport de fonctions irrégulières comme dans la présente étude).

La méthode des caractéristiques est depuis longtemps utilisée d'un point de vue théorique comme principe de construction d'une solution à l'équation de transport (4.4). On prouve ainsi l'existence d'une solution [4]. Mais cette méthode s'avère également être un outil numérique à part entière (on parle alors de schéma MOC pour *Method of Characteristics*), utilisant les propriétés du flot caractéristique associé au champ de vitesse (cf. §2.4). On donne quelques exemples dans la suite, avant de construire une nouvelle méthode, dans le but d'améliorer la précision générale du schéma. Ce nouveau schéma a en effet pour but d'atteindre un ordre 2 par rapport aux paramètres de discrétisation d'espace et de temps, tout en conservant certaines propriétés physiques des solutions, comme le caractère borné dans $[0, 1]$. Pour cela, on combine deux schémas avec une stratégie permettant de garantir, par construction, le principe du maximum. L'avantage des schémas MOC est leur stabilité inconditionnelle, puisque l'on remonte les courbes caractéristiques (sur lesquelles la solution est constante ou suit une loi d'évolution connue) aussi loin que nécessaire. Le schéma proposé ici est donc explicite, stable, non dispersif et d'ordre 2.

4.3.1 Notations

On introduit pour la suite le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \partial_t Y(t, \mathbf{x}) + \mathbf{U}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla Y(t, \mathbf{x}) \stackrel{\Omega}{=} f(t, \mathbf{x}), & (4.4a) \\ Y(0, \cdot) \stackrel{\Omega}{=} Y^0. & (4.4b) \end{cases}$$

L'inconnue est la fonction scalaire Y , que l'on recherche dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ borné lipschitzien ($d \in \{1, 2, 3\}$). Les données du problème sont la condition initiale $Y^0 \in L^\infty(\Omega)$, le terme source $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \Omega)$ et le champ de vitesse \mathbf{U} . Ce champ de vitesse sera soit supposé constant, auquel cas on ajoute une condition aux limites (pour Y) sur la partie du bord où le champ est entrant ($\mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\nu} > 0$), soit supposé appartenant à l'espace $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \overline{\Omega})$ et vérifiant la condition aux limites :

$$\mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\nu} \stackrel{\partial\Omega}{=} 0.$$

Dans ce cas, aucune condition de bord sur Y n'est nécessaire.

On rappelle que le flot caractéristique est défini comme la solution de l'EDO :

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{X}}{d\tau} = \mathbf{U}(\tau, \mathcal{X}(\tau)), \\ \mathcal{X}(s) = \mathbf{x}_0, \end{cases} \quad (4.5)$$

pour $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ et $s \in \mathbb{R}_+$. Numériquement, on peut utiliser cette méthode de deux manières distinctes :

- ① Si l'opérateur de convection $D_t = \partial_t + (\mathbf{U} \cdot \nabla)$ intervient dans un système plus complexe (Euler, Navier-Stokes) du type $D_t Y + \mathcal{D}Y = f$ où \mathcal{D} est un opérateur différentiel, on écrit :

$$D_t Y = \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \left(Y(\tau, \mathcal{X}(\tau; t, \mathbf{x})) \right) \right]_{\tau=t}.$$

La semi-discrétisation en temps (de pas Δt) se fait alors le long de la caractéristique par la formule :

$$\frac{Y(t, \mathbf{x}) - Y(t - \Delta t, \mathcal{X}(t - \Delta t; t, \mathbf{x}))}{\Delta t} + \mathcal{D}Y(t, \mathbf{x}) = f(t, \mathbf{x}).$$

La résolution en espace se fait généralement par une méthode d'éléments finis [4, 31, 32, 40]. On parle alors de méthode de **Lagrange-Galerkin**. Parmi les premiers schémas alliant MOC et éléments finis, le schéma de Bardos, Bercovier et Pironneau [4] se basait sur une vitesse constante dans chaque élément de maillage, permettant une résolution « exacte » de l'EDO caractéristique. Dans le même temps a été développé le schéma MMOC (*modified method of characteristics*, [32]). Ce schéma est toutefois connu pour ne pas vérifier le principe de conservation de la masse. Le schéma MMOCAA (*modified method of characteristics with adjusted advection*, [31]) a alors été construit, avec une correction du champ de vitesse à chaque étape, de sorte que ce principe de conservation soit satisfait. On peut également citer le schéma FEMMOC

(*Finite Element MMOC*, [34]), qui utilise des limiteurs pour pallier au problème de monotonie. Dans ces schémas, la caractéristique est donnée par une approximation d'ordre 1. D'autres modèles se basent sur des méthodes de point fixe sur l'incrément spatial $\mathbf{x} - \mathcal{X}(t - \Delta t; t, \mathbf{x})$ [83]. Dans [40], on utilise une approximation d'ordre 2, avec une adaptation en maillages fixe ou mobile. Plusieurs études de convergence ont été menées sur ces schémas, parmi lesquelles on peut citer les travaux de Pironneau [71] et de Süli [85].

- ② Si, en revanche, on est en présence d'une « simple » équation de transport $D_t Y = f$ (que le champ de vitesse soit donné ou soit solution d'une autre équation couplée), la solution est cette fois-ci connue et donnée par :

$$Y(t, \mathbf{x}) = Y^0(\mathcal{X}(0; t, \mathbf{x})) + \int_0^t f(\sigma, \mathcal{X}(\sigma; t, \mathbf{x})) d\sigma.$$

Cette formule requiert toutefois la connaissance du flot \mathcal{X} , solution de (4.5) pour $s = t$, sur l'intervalle $[0, t]$. Cependant, résoudre à chaque étape l'EDO sur l'intervalle complet $[0, t]$ risque de propager des instabilités numériques. C'est pourquoi on préfère utiliser la propriété de semi-groupe (2.4) du flot, qui permet de reformuler la solution dans un voisinage de (t, \mathbf{x}) :

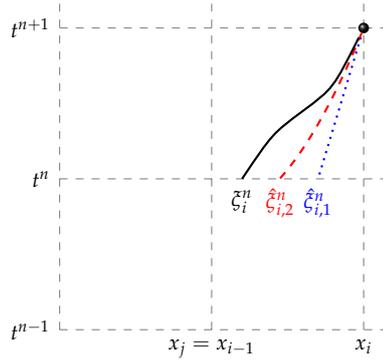
$$Y(t, \mathbf{x}) = Y(t - \Delta t, \mathcal{X}(t - \Delta t; t, \mathbf{x})) + \int_{t - \Delta t}^t f(\sigma, \mathcal{X}(\sigma; t, \mathbf{x})) d\sigma,$$

qui ne nécessite plus de résoudre (4.5) que sur l'intervalle $[t - \Delta t, t]$, connaissant la solution Y au temps $t - \Delta t$. On a ainsi une procédure locale, qui minimise l'erreur commise dans la résolution. L'intégrale est quant à elle calculée par une formule d'intégration numérique (rectangles, trapèzes, ...). Cette méthode se décompose donc en deux étapes :

- ① une première étape qui consiste à déterminer la solution de l'EDO (4.5). Cela revient à approcher la courbe caractéristique qui passe par le point \mathbf{x} au temps t . C'est pourquoi on qualifiera souvent cette étape de « construction de la caractéristique ». Elle permet en particulier d'approcher le pied de la caractéristique, $\xi = \mathcal{X}(t - \Delta t; t, \mathbf{x})$, nommé « upstream point » (ou *point amont*) dans la littérature (cf. FIG. 4.1).
- ② la seconde étape est une étape « d'interpolation ». En effet, le point ξ n'étant *a priori* pas un nœud du maillage et comme la solution $Y(t - \Delta t, \cdot)$ n'est elle connue qu'aux nœuds, il est nécessaire de recourir à une interpolation. Par exemple, dans [49], une interpolation d'Hermitte aux deux nœuds situés aux extrémités de la cellule à laquelle appartient ξ est utilisée.

Il existe également des schémas qui utilisent là-aussi un couplage avec les éléments finis [52].

Dans la mesure où le modèle ABV comporte une équation d'advection pure, c'est cette seconde stratégie qui est choisie. La résolution de l'EDP (4.4) se résume donc au traitement de l'EDO (4.5).


 FIG. 4.1 – Approximations d’ordres 1 et 2 de la courbe caractéristique passant par le point (t, x)

Un premier intérêt de ces méthodes est justement ce découpage en deux étapes, qui correspond d’ailleurs à un **splitting** avec une **étape en temps** (la construction de la caractéristique ne fait apparaître, d’un point de vue théorique, que des paramètres temporels) et une **étape en espace** (interpolation). Ceci tend à justifier une certaine indépendance des deux paramètres de discrétisation Δt et Δx , ce que l’on confirmera à travers l’étude de la stabilité inconditionnelle. **L’apport est ici la montée en ordre sur les deux étapes.**

4.3.2 Construction du schéma

On présente dans la suite le schéma **MOC2**, dédié à la résolution de l’équation de transport linéaire homogène :

$$\partial_t Y + \mathbf{U} \cdot \nabla Y = 0, \quad Y(0, \mathbf{x}) = Y^0(\mathbf{x}). \quad (4.6)$$

On note $\Phi(t, s, \mathbf{x}_0) = \mathcal{X}(t; s, \mathbf{x}_0)$ la solution au temps t de (4.5).⁵ Cet opérateur, de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \mathcal{T}]^2 \times \overline{\Omega}$, vérifie la propriété de semi-groupe :

$$\Phi(\tau, s, \Phi(s, t, \mathbf{x}_0)) = \Phi(\tau, t, \mathbf{x}_0).$$

Ses dérivées vérifient également les égalités suivantes (cf. §2.4) :

$$\partial_t \Phi(t, s, \mathbf{x}_0) = \mathbf{U}(t, \Phi(t, s, \mathbf{x}_0)), \quad (4.7a)$$

$$\partial_s \Phi(t, s, \mathbf{x}_0) = -\nabla_{\mathbf{x}_0} \Phi(t, s, \mathbf{x}_0) \mathbf{U}(s, \mathbf{x}_0). \quad (4.7b)$$

$\Phi_{t,s} := \Phi(t, s, \cdot)$ définit alors un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de Ω dans lui-même pour tous t et s fixés dans $[0, \mathcal{T}]$. Son inverse est alors $\Phi_{t,s}^{-1} = \Phi_{s,t}$. La solution de (4.6) est donc donnée par :

$$Y(t, \mathbf{x}) = Y^0(\Phi(0, t, \mathbf{x})) = Y(s, \Phi(s, t, \mathbf{x})). \quad (4.8)$$

On introduit pour la suite un maillage spatio-temporel cartésien uniforme, paramétré par les nombres de points en temps N_t et en espace N_x .

⁵ On introduit la notation Φ de sorte que s et \mathbf{x}_0 soient considérés comme des variables (dont Φ est fonction) et non plus comme des paramètres (dont \mathcal{X} dépend).

On se restreint au domaine $[0, \mathcal{T}] \times [a, b]$, pour un certain temps $\mathcal{T} > 0$ et $a < b$. Les nœuds sont alors donnés par :

$$t^n = n\Delta t, \text{ avec } \Delta t = \frac{\mathcal{T}}{N_t - 1}, \quad \text{et} \quad x_i = a + (i - 1)\Delta x, \text{ avec } \Delta x = \frac{b - a}{N_x - 1}.$$

On définit le schéma dans le cadre d'un maillage homogène, mais il est possible d'étendre les résultats au cas d'un maillage quelconque.

Le schéma consiste donc, compte-tenu de (4.8) avec $s = t^n$ et $t = t^{n+1}$, à calculer la solution au temps t^{n+1} par :

$$Y_i^{n+1} = Y(t^{n+1}, x_i) = Y(t^n, \Phi(t^n, t^{n+1}, x_i)). \quad (4.9)$$

On distingue deux étapes dans le processus : la première étape est consacrée au calcul de $\zeta_i^n := \Phi(t^n, t^{n+1}, x_i)$ et la seconde à l'approximation de $Y(t^n, \zeta_i^n)$, sachant que l'on ne connaît la solution qu'aux nœuds du maillage. ζ_i^n se situe donc, dans le repère (t, x) à l'intersection de la courbe caractéristique issue du nœud (t^{n+1}, x_i) avec la droite d'équation $t = t^n$ (cf. FIG. 4.1).

La première étape est réalisée en dimension quelconque. La seconde, en revanche, est adaptée à la dimension 1.

Étape en temps (calcul du point amont)

Dans un certain nombre de schémas MOC, le point amont est donné par une approximation d'ordre 1, à savoir :

$$\hat{\zeta}_{i,1}^n = x_i - \Delta t \cdot \mathbf{U}(t^n, x_i), \quad (4.10)$$

ce qui revient à approcher la courbe par une droite (cf. FIG. 4.1). Cette formule est exacte dans le cas d'un champ de vitesse constant. Pour des vitesses variables, on cherche à améliorer la précision par un calcul de ζ_i^n à l'aide de développements limités de Φ et des formules (4.7). On a tout d'abord :

$$\Phi(t, s, x) = \Phi(t, t, x) + (s - t) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(t, t, x) + \frac{(s - t)^2}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2}(t, t, x) + \mathcal{O}((s - t)^3).$$

Déterminons une expression de chacun de ces termes en fonction de la donnée \mathbf{U} . On a, par définition, $\Phi(t, t, x) = x$ et $\nabla_{x_0} \Phi(t, t, x) = \mathcal{Id}$. Il s'ensuit, d'après (4.7b) :

$$\partial_s \Phi(t, t, x) = -\mathbf{U}(t, x).$$

En dérivant cette égalité par rapport à t , on obtient :

$$\partial_{ss}^2 \Phi(t, t, x) + \partial_{ts}^2 \Phi(t, t, x) = -\partial_t \mathbf{U}(t, x).$$

Afin d'évaluer la dérivée seconde $\partial_{ts}^2 \Phi$, on utilise le lemme de *Schwarz* (que l'on peut appliquer du fait de la régularité supposée de \mathbf{U} donc de Φ), ce qui permet d'avoir $\partial_{ts}^2 \Phi = \partial_{st}^2 \Phi$. En dérivant l'équation caractéristique (4.7a) par rapport à s , on obtient :

$$\partial_{ts}^2 \Phi(t, t, x) = \nabla \mathbf{U}(t, x) \partial_s \Phi(t, t, x) = -\nabla \mathbf{U}(t, x) \mathbf{U}(t, x) = -(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U}(t, x).$$

D'où :

$$\Phi(t, s, \mathbf{x}) = \mathbf{x} - (s - t)\mathbf{U}(t, \mathbf{x}) + \frac{(s - t)^2}{2} [(\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U}(t, \mathbf{x}) - \partial_t \mathbf{U}(t, \mathbf{x})] + \mathcal{O}((s - t)^3).$$

Soit :

$$\Phi(t^n, t^{n+1}, \mathbf{x}) = \mathbf{x} - \Delta t \cdot \mathbf{U}(t^n, \mathbf{x}) + \frac{\Delta t^2}{2} [(\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U}(t^n, \mathbf{x}) - \partial_t \mathbf{U}(t^n, \mathbf{x})] + \mathcal{O}(\Delta t^3). \quad (4.11)$$

C'est à ce point du développement qu'intervient le cadre général dans lequel s'insère l'équation de transport (4.6). En effet, la formule (4.11) fait intervenir les dérivées du champ de vitesse. Si \mathbf{U} est donné analytiquement, on peut calculer ses dérivées en temps et en espace explicitement. En revanche, si le champ de vitesse est également une inconnue du problème, il faut prendre garde à la disponibilité des données. Par exemple, dans le modèle ABV, \mathbf{U} est donné par :

$$\nabla \cdot \mathbf{U}(t, \mathbf{x}) \propto Y(t, \mathbf{x}) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y(t, \mathbf{x}') \, d\mathbf{x}'.$$

Comme la solution numérique Y n'est connue que jusqu'au temps t^n , la discrétisation de $\partial_t \mathbf{U}$ ne doit pas faire intervenir $\mathbf{U}(t^{n+1}, \mathbf{x})$. De même, si la méthode des caractéristiques est utilisée pour traiter l'équation de Burgers [12] :

$$\partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U} = 0, \quad (4.12)$$

on vérifie que $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$, et la caractéristique est exactement donnée par :

$$\Phi(t^n, t^{n+1}, \mathbf{x}) = \mathbf{x} - \Delta t \cdot \mathbf{U}(t^{n+1}, \mathbf{x}).$$

Cependant, $\mathbf{U}(t^{n+1}, \cdot)$ n'est pas encore connu. On utilise donc la formule (4.11). Or, dans cette formule, intervient le terme $\partial_t \mathbf{U}$. Une différence finie $(\mathbf{U}(t^n, \mathbf{x}) - \mathbf{U}(t^{n-1}, \mathbf{x})) / \Delta t$ nécessiterait le stockage de deux niveaux de temps de la solution. C'est pourquoi, dans ce cas particulier, on remplace le terme $\partial_t \mathbf{U}$ par $-(\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U}$ d'après (4.12). Le schéma prend alors la forme, pour l'équation de Burgers :

$$\Phi(t^n, t^{n+1}, \mathbf{x}) = \mathbf{x} - \Delta t \cdot \mathbf{U}(t^n, \mathbf{x}) + \Delta t^2 [(\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U}](t^n, \mathbf{x}) + \mathcal{O}(\Delta t^3). \quad (4.13)$$

Dans les autres cas, en dimension 1 (où on note \mathcal{U} le champ de vitesse), le développement limité s'écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_i^n &= x_i - \Delta t \cdot \mathcal{U}(t^n, x_i) + \frac{\Delta t^2}{2} [\partial_x \mathcal{U}(t^n, x_i) \cdot \mathcal{U}(t^n, x_i) - \partial_t \mathcal{U}(t^n, x_i)] + \mathcal{O}(\Delta t^3), \\ &= x_i - \Delta t \cdot \mathcal{U}(t^n, x_i) + \frac{\Delta t^2}{2} \left[\partial_x \left(\frac{\mathcal{U}^2}{2} \right) (t^n, x_i) - \partial_t \mathcal{U}(t^n, x_i) \right] + \mathcal{O}(\Delta t^3). \end{aligned}$$

On testera dans la suite l'influence de la formulation conservative $\partial_x(\mathcal{U}^2)$ par rapport au produit $\mathcal{U}\partial_x \mathcal{U}$. Dans la suite, on approxime la dérivée en temps par une formule d'Euler et la dérivée en espace par une formule centrée.

Le point amont dans le schéma MOC2 est donc approché par :

$$\hat{\xi}_{i,2}^n = x_i - \frac{\Delta t}{2}(3U_i^n - U_i^{n-1}) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{(U_{i+1}^n)^2 - (U_{i-1}^n)^2}{2\Delta x}, \quad (4.14)$$

où U_i^n désigne la valeur approchée de $\mathcal{U}(t^n, x_i)$. Si le champ \mathcal{U} est donné explicitement, l'erreur induite par (4.11) est en $\mathcal{O}(\Delta t^3)$. Mais du fait des calculs approchés des dérivées, l'erreur commise en prenant (4.14) est en $\mathcal{O}(\Delta t^3 + \Delta t^2 \Delta x^2)$. Avec des arguments similaires et en supposant plus de régularité sur \mathbf{U} , on peut continuer d'augmenter la précision du schéma en calculant le terme $\partial_{s_3}^3 \Phi(t, t, \mathbf{x})$.

Cette étape de construction étant indépendante de la solution courante, elle peut être commune au transport de plusieurs variables sous le même champ d'advection. L'étape suivante est en revanche propre à chaque variable.

Étape en espace (interpolation)

Dans la suite, $\hat{\xi}_i^n$ désigne l'approximation du pied de la caractéristique, que ce soit par une formule d'ordre 1 ou d'ordre 2 (voire d'ordre supérieur). On cherche à approcher la valeur $Y(t^n, \hat{\xi}_i^n)$. Pour cela, on détermine en premier lieu la cellule dans laquelle le pied de la caractéristique se situe. Une fois isolée la maille⁶ $[x_j, x_{j+1}[$ à laquelle appartient $\hat{\xi}_i^n$, on introduit le facteur de position :

$$\theta_{ij}^n := \frac{x_{j+1} - \hat{\xi}_i^n}{\Delta x}. \quad (4.15)$$

On a, par définition, $\theta_{ij}^n \in]0, 1]$, $\hat{\xi}_i^n = x_{j+1} - \theta_{ij}^n \Delta x$ et $\theta_{ij}^n = 1$ ssi $\hat{\xi}_i^n = x_j$.

Pour évaluer la valeur $Y(t^n, \hat{\xi}_i^n)$ sachant que $x_j \leq \hat{\xi}_i^n < x_{j+1}$, la première idée fut historiquement d'utiliser une interpolation linéaire de Y_j^n et Y_{j+1}^n :

$$Y_i^{n+1} = \theta_{ij}^n Y_j^n + (1 - \theta_{ij}^n) Y_{j+1}^n. \quad (4.16)$$

En particulier, si le champ de vitesse est constant et sous l'hypothèse $0 < \frac{\mathcal{U} \Delta t}{\Delta x} \leq 1$, alors $\hat{\xi}_i^n = x_i - \mathcal{U} \Delta t$, $j = i - 1$ et le schéma MOC redonne le schéma upwind :⁷

$$\frac{Y_i^{n+1} - Y_i^n}{\Delta t} + \mathcal{U} \frac{Y_i^n - Y_{i-1}^n}{\Delta x} = 0.$$

Cette remarque permet de mieux comprendre le sens de la condition CFL⁸ qui assure la stabilité du schéma upwind. Si la condition CFL n'est pas respectée, i.e. $\Delta t > \Delta x / \mathcal{U}$, alors le pied de la caractéristique vérifie :

$$\hat{\xi}_i^n < x_{i-1} \implies \hat{\xi}_i^n \notin [x_{i-1}, x_i[.$$

⁶ L'indice j est donné par $j = 1 + \left\lfloor \frac{\hat{\xi}_i^n - a}{\Delta x} \right\rfloor$, le domaine d'étude étant $[a, b]$.

⁷ Avec $\frac{\mathcal{U} \Delta t}{\Delta x} \in [-1, 0]$, on retrouve encore le schéma upwind, avec cette fois-ci $j = i$.

⁸ La condition de *Courant-Friedrichs-Lewy* pour le schéma upwind est $\left| \frac{\mathcal{U} \Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1$.

Le schéma upwind interpole toujours aux points x_{i-1} et x_i alors que la caractéristique peut être très éloignée de ces points. D'où la contrainte imposée sur le domaine de dépendance numérique d'inclure le domaine de dépendance physique. La condition CFL assure donc la pertinence des valeurs prises en compte dans les schémas. La grande force des schémas MOC est de toujours aller chercher les valeurs pertinentes aussi loin que nécessaire, en fonction du champ de vitesse et des paramètres de discrétisation. Ce stencil variable explique pourquoi les schémas MOC sont généralement inconditionnellement stables.

Avec une interpolation linéaire (4.16), on obtient un schéma stable (combinaison convexe), consistant à l'ordre 1 et non dispersif. Cependant, on souhaite ici améliorer l'ordre en espace de la méthode, en choisissant une interpolation de degré plus élevé. Gardant à l'esprit que plus le stencil est large, plus le phénomène de diffusion numérique est important, on s'intéresse à l'ordre 2. Cet ordre fait intervenir 3 nœuds, dont le choix reste à déterminer parmi $\{x_{j-1}, x_j, x_{j+1}\}$ et $\{x_j, x_{j+1}, x_{j+2}\}$.

La formule d'interpolation de Lagrange d'ordre 2 aux points $\{x_{j-1}, x_j, x_{j+1}\}$ s'écrit :

$$Y(\xi) \approx Y(x_{j-1})\ell_{j-1}(\xi) + Y(x_j)\ell_j(\xi) + Y(x_{j+1})\ell_{j+1}(\xi),$$

en notant (ℓ_k) la base de polynômes de Lagrange associée :

$$\ell_{j-1} = \frac{(x_j - X)(x_{j+1} - X)}{2\Delta x^2}, \ell_j = \frac{(X - x_{j-1})(x_{j+1} - X)}{\Delta x^2} \text{ et } \ell_{j+1} = \frac{(X - x_j)(X - x_{j-1})}{2\Delta x^2}.$$

Le schéma s'écrit alors $Y_i^{n+1} = \mathcal{Y}_g(\theta_{ij}^n)$, avec :

$$\mathcal{Y}_g(\theta) = -\frac{\theta(1-\theta)}{2}Y_{j-1}^n + \theta(2-\theta)Y_j^n + \frac{(1-\theta)(2-\theta)}{2}Y_{j+1}^n \quad (4.17a)$$

$$= \frac{\theta^2}{2}(Y_{j-1}^n - 2Y_j^n + Y_{j+1}^n) - \frac{\theta}{2}(Y_{j-1}^n - 4Y_j^n + 3Y_{j+1}^n) + Y_{j+1}^n. \quad (4.17b)$$

Cette formule peut également s'obtenir grâce à un développement limité autour de x_j en cherchant une combinaison linéaire de Y_{j-1}^n , Y_j^n et Y_{j+1}^n qui approche $Y(t^n, \hat{\xi}_i^n)$ à l'ordre 2.

Si l'on choisit de faire intervenir les points $\{x_j, x_{j+1}, x_{j+2}\}$, on obtient la formule $Y_i^{n+1} = \mathcal{Y}_d(\theta_{ij})$, avec :

$$\mathcal{Y}_d(\theta) = \frac{\theta(1+\theta)}{2}Y_j^n + (1-\theta^2)Y_{j+1}^n - \frac{\theta(1-\theta)}{2}Y_{j+2}^n \quad (4.18a)$$

$$= \frac{\theta^2}{2}(Y_{j+2}^n - 2Y_{j+1}^n + Y_j^n) - \frac{\theta}{2}(Y_{j+2}^n - Y_j^n) + Y_{j+1}^n. \quad (4.18b)$$

On nommera par la suite MOC_g le schéma donné par (4.14), (4.15) et $Y_i^{n+1} = \mathcal{Y}_g(\theta_{ij}^n)$. De même, MOC_d désigne la version avec $Y_i^{n+1} = \mathcal{Y}_d(\theta_{ij}^n)$. À noter que les formules polynomiales en θ (4.17b) et (4.18b) s'avèrent être plus stables numériquement que les combinaisons linéaires (4.17a) et (4.18a) pour des questions de zéro machine. En effet, dans le cas des fonctions de type « bulle régularisée », dans une zone où la fonction est constante à 0 ou à 1, chacune des parenthèses dans (4.17b) est nulle et le résultat est donné par le terme restant. Ceci risque de ne pas se produire avec (4.17a) à cause d'erreurs d'arrondi dans le calcul des termes en θ .

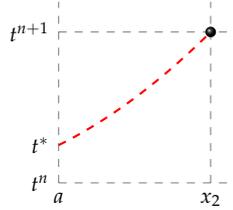


FIG. 4.2 – Problème de condition aux limites

Conditions aux limites

Un point fondamental dans les schémas MOC est le problème des conditions aux limites. En présence de conditions aux limites périodiques, il n'y a aucun traitement particulier à faire. En revanche, si l'on prescrit des conditions de bord pour l'équation d'advection (Dirichlet sur les parties de la frontière où le champ de vitesse est entrant : par exemple, $Y(t, a) = \eta(t)$ pour η donnée), il se peut que, partant du nœud (t^{n+1}, x_i) , les courbes caractéristiques (exactes ou approchées) coupent la frontière avant d'atteindre le temps t^n . Prenons la configuration de la figure 4.2. Le point délicat est d'estimer le temps t^* auquel la caractéristique approchée atteint le bord, ce temps étant nécessaire pour évaluer $Y_2^{n+1} \approx Y(t^*, a) = \eta(t^*)$.

Plusieurs cas particuliers sont à explorer :

- Le cas le plus simple correspond à une condition aux limites constante, du type $\eta(t) = 0$ par exemple. Il vient alors $Y_2^{n+1} = 0$.
- Si la vitesse \mathcal{U} est constante, on a $a = x_2 - \mathcal{U} \cdot (t^{n+1} - t^*)$, ce qui fournit t^* . On en déduit Y_2^{n+1} .
- Si le champ de vitesse est connu, on peut utiliser l'approximation $a = x_2 - \mathcal{U}(t^{n+1}, x_2) \cdot (t^{n+1} - t^*)$.

Dans le cas général, l'idée de Holly et Preissmann [49] est d'approcher la caractéristique par une formule des trapèzes :

$$a = x_2 - (t^{n+1} - t^*) \frac{U^* + U_2^{n+1}}{2},$$

avec U^* donnée par une interpolation en temps du champ de vitesse :

$$U^* = U_1^n + \frac{t^* - t^n}{\Delta t} (U_1^{n+1} - U_1^n).$$

Ceci définit donc une expression implicite de t^* . En combinant les deux égalités, on obtient une équation polynomiale d'ordre 2 par rapport à t^* , la solution pertinente étant celle appartenant à l'intervalle $[t^n, t^{n+1}]$.

Terme source

Terminons par quelques remarques dans le cas d'une équation de transport avec terme source f . On a vu que la solution exacte vérifiait l'égalité :

$$Y(t^{n+1}, x_i) = Y(t^n, \xi_i^n) + \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(\sigma, \Phi(\sigma, t^{n+1}, x_i)) d\sigma.$$

Supposons le calcul du point amont effectué, avec une approximation $\hat{\xi}_i^n$ de ξ_i^n . On peut approcher l'intégrale, notée $I(t^n, x_i)$, par les formules d'intégration classiques :

$$\begin{aligned} I(t^n, x_i) &\approx \Delta t f(t^n, \hat{\xi}_i^n) && \text{(rectangles à gauche)} \\ &\approx \Delta t f(t^{n+1}, x_i) && \text{(rectangles à droite)} \\ &\approx \Delta t \frac{f(t^n, \hat{\xi}_i^n) + f(t^{n+1}, x_i)}{2}. && \text{(trapèzes)} \end{aligned}$$

Classiquement, les deux premières formules sont d'ordre 1 (par rapport à Δt) tandis que la troisième est d'ordre 2. De la même manière que pour l'évaluation du champ de vitesse, on distingue le cas où le terme source est donné explicitement et celui où il provient de la résolution d'une autre équation. Dans le premier cas, on a accès aux données $f(t^{n+1}, \cdot)$ et, comme $\hat{\xi}_i^n$ est déjà connu, on utilise la formule des trapèzes telle qu'elle est présentée ici. En revanche, si l'on ne dispose que des valeurs de f aux temps t^n, t^{n-1}, \dots et aux nœuds du maillage, on procède par développement limité en temps pour évaluer $f(t^{n+1}, x_i)$ et en espace pour $f(t^n, \hat{\xi}_i^n)$.

4.3.3 Étude séparée des deux schémas

On propose ici une analyse du schéma MOC_g , l'analyse de MOC_d étant analogue. Pour cela, on considère l'équation de transport linéaire à vitesse constante \mathcal{U} . Plus précisément, le pied de la caractéristique est calculé par (4.14), qui se résume ici à :

$$\hat{\xi}_i^n = \xi_i^n = x_i - \mathcal{U}\Delta t,$$

et la phase d'interpolation est réalisée à l'aide de \mathcal{Y}_g . En notant $\lambda = \frac{\mathcal{U}\Delta t}{\Delta x}$ le nombre de Courant, il vient :

$$j = i + \lfloor -\lambda \rfloor, \quad (4.19a)$$

et :

$$\theta_{ij}^n = j - i + 1 + \lambda = 1 + \lfloor -\lambda \rfloor + \lambda = \theta. \quad (4.19b)$$

Le schéma s'écrit donc :

$$Y_i^{n+1} = \frac{\theta^2}{2} (Y_{j-1}^n - 2Y_j^n + Y_{j+1}^n) - \frac{\theta}{2} (Y_{j-1}^n - 4Y_j^n + 3Y_{j+1}^n) + Y_{j+1}^n. \quad (4.19c)$$

Nous allons montrer que le schéma (4.19) est linéaire, stable, conservatif et consistant, mais source d'instabilités numériques, ce qui sera confirmé par les simulations numériques.

Linéarité

Comme le stencil est ici constant, à savoir $\{x_{i-1+\lfloor -\lambda \rfloor}, x_{i+\lfloor -\lambda \rfloor}, x_{i+1+\lfloor -\lambda \rfloor}\}$ et comme θ est indépendant de i et de n , la formule (4.19c) est linéaire.

Conservativité

Le champ de vitesse étant constant, l'équation de transport peut se mettre sous la forme conservative :

$$\partial_t Y + \partial_x(YU) = 0.$$

On vérifie alors que le schéma est conservatif, *i.e.* peut se mettre sous la forme :

$$\frac{Y_i^{n+1} - Y_i^n}{\Delta t} + \frac{\mathcal{F}_{i+1/2}^n - \mathcal{F}_{i-1/2}^n}{\Delta x} = 0,$$

où $\mathcal{F}_{i+1/2}^n = \mathcal{F}(Y_{i-k_1}^n, \dots, Y_i^n, \dots, Y_{i+k_2}^n)$ pour des indices k_1 et k_2 fixés, avec un critère de consistance de flux donné par $\mathcal{F}(Y, \dots, Y) = YU$.

Donnons tout d'abord quelques cas particuliers. Lorsque $|\lambda| \leq 1$, on a :

- si $U > 0$, alors $j = i - 1$ et on retrouve le schéma de Beam-Warming [58, p.101], qui est consistant et convergent (on s'est placé ici sous la condition CFL $\lambda < 1$). Le flux s'écrit alors :

$$\mathcal{F}_{i+1/2}^n = U \left[Y_i^n + \frac{1}{2}(1 - \lambda)(Y_i^n - Y_{i-1}^n) \right];$$

- si $U < 0$, alors $j = i$ et on obtient le schéma de Lax-Wendroff, qui a les mêmes propriétés, avec pour flux :

$$\mathcal{F}_{i+1/2}^n = U \left[Y_i^n + \frac{1}{2}(1 - \lambda)(Y_{i+1}^n - Y_i^n) \right].$$

Par ailleurs, lorsque $\lambda \in \mathbb{Z}$, en vertu de (4.19b), on a $\theta = 1$ et le schéma s'écrit :

$$Y_i^{n+1} = Y_j^n, \text{ avec } j = i - \lambda.$$

On a ainsi un transport avec conservation parfaite du profil de la donnée initiale, quels que soient Δt et Δx .

De manière générale, pour $U > 0$ et $\lambda > 1$ (d'où $i \geq j + 2$), le flux numérique se formule :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{i+1/2}^n = U & \left[Y_{j+1}^n + \frac{1}{2}(1 - \lambda)(Y_{j+1}^n - Y_j^n) \right. \\ & \left. + \frac{1}{\lambda} \sum_{k=j+2}^i \left(Y_k^n - Y_{j+1}^n + \frac{2\lambda + \lfloor -\lambda \rfloor}{2}(Y_{j+1}^n - Y_j^n) \right) \right]. \end{aligned}$$

Ce flux, bien que plus complexe, demeure consistant et est cohérent avec le cas $0 < \lambda \leq 1$ (la somme étant alors vide). Le même raisonnement tient pour le cas $\lambda < -1$.

Stabilité

Montrons, par une analyse de Von Neumann, la stabilité du schéma MOC_g. Comme évoqué précédemment, on s'attend à aboutir à une stabilité inconditionnelle, caractéristique des schémas MOC. Pour cela, notons ι le nombre complexe tel que $\iota^2 = -1$, puis supposons, pour $k \in \mathbb{Z}$, que :

$$Y_i^n = v_n \exp[\iota k x_i].$$

En insérant cette relation dans le schéma, il vient, compte-tenu de l'égalité $Y_j^n = Y_i^n \exp[\iota(j-i)\Delta x]$:

$$v_{n+1}e^{ikx_i} = v_n e^{ik[x_i+(j-i)\Delta x]} \left[-\frac{\theta(1-\theta)}{2}e^{-ik\Delta x} + \theta(2-\theta) + \frac{(1-\theta)(2-\theta)}{2}e^{ik\Delta x} \right],$$

soit encore :

$$v_{n+1} = \mathcal{A}(i, j, k)v_n,$$

où le coefficient d'amplification vaut :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(i, j, k) &= e^{ik(j-i)\Delta x} \left[-\frac{\theta(1-\theta)}{2}e^{-ik\Delta x} + \theta(2-\theta) + \frac{(1-\theta)(2-\theta)}{2}e^{ik\Delta x} \right], \\ &= e^{ik(j-i)\Delta x} \left[\theta(2-\theta) + (1-\theta)^2 \cos(k\Delta x) + \iota(1-\theta) \sin(k\Delta x) \right]. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}(i, j, k)|^2 &= \theta^2(2-\theta)^2 + (1-\theta)^4 \cos^2(k\Delta x) \\ &\quad + 2\theta(2-\theta)(1-\theta)^2 \cos(k\Delta x) + (1-\theta)^2 \sin^2(k\Delta x), \\ &= \theta^2(2-\theta)^2 + (1-\theta)^4 + 2\theta(2-\theta)(1-\theta)^2 \cos(k\Delta x) \\ &\quad + \left[(1-\theta)^2 - (1-\theta)^4 \right] \sin^2(k\Delta x), \\ &= \theta^2(2-\theta)^2 + (1-\theta)^4 + \theta(2-\theta)(1-\theta)^2 [2 \cos(k\Delta x) + \sin^2(k\Delta x)], \\ &= \left[\theta(2-\theta) + (1-\theta)^2 \right]^2 + \theta(2-\theta)(1-\theta)^2 [2 \cos(k\Delta x) + \sin^2(k\Delta x) - 2], \\ &= 1 - \theta(2-\theta)(1-\theta)^2 [1 - \cos(k\Delta x)]^2. \end{aligned}$$

Avec $\theta \in]0, 1]$, on vérifie que, quels que soient $k \in \mathbb{Z}$, $\Delta t > 0$ et $\Delta x > 0$, on a bien :

$$|\mathcal{A}(i, j, k)| \leq 1,$$

ce qui justifie la stabilité inconditionnelle de MOC_g .

Consistance des schémas

On étudie ensuite la consistance du schéma (4.19) ainsi que l'ordre de la méthode. Car si les schémas MOC sont généralement inconditionnellement stables, leur principal défaut est souvent la consistance. Le schéma proposé par Pironneau est par exemple d'ordre $\mathcal{O}\left(\Delta t + \Delta x + \frac{\Delta x^2}{\Delta t}\right)$ [71]. On ne peut donc pas prendre de pas de temps trop petits. Toutefois, comme on va le voir, on évite ici ce problème de consistance conditionnelle.

Pour Y solution de l'équation d'advection (4.4a), on pose :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i^n(\Delta t, \Delta x) &:= \frac{1}{\Delta t} \left[Y(t^{n+1}, x_i) - \frac{\theta^2}{2} [Y(t^n, x_{j-1}) - 2Y(t^n, x_j) + Y(t^n, x_{j+1})] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\theta}{2} [Y(t^n, x_{j-1}) - 4Y(t^n, x_j) + 3Y(t^n, x_{j+1})] - Y(t^n, x_{j+1}) \right]. \end{aligned}$$

Pour déterminer l'ordre de l'erreur de troncature, on effectue un développement de Taylor avec reste intégral autour du point (t^n, x_i) :

$$Y(t^n, x_k) = Y(t^n, x_i) + (k-i)\Delta x \partial_x Y(t^n, x_i) + \frac{(k-i)^2 \Delta x^2}{2} \partial_{xx}^2 Y(t^n, x_i) + \int_{x_i}^{x_k} \frac{(x_k - z)^2}{2} Y^{(3)}(t^n, z) dz,$$

du fait que $x_k - x_i = (k-i)\Delta x$. Il vient alors :

$$\begin{aligned} \Delta t \mathcal{E}_i^n(\Delta t, \Delta x) &= \Delta t \mathcal{R}_i^n + \Delta t \partial_t Y(t^n, x_i) + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_{tt}^2 Y(t^n, x_i) + \mathcal{O}(\Delta t^3) \\ &+ \partial_x Y(t^n, x_i) \Delta x \left[\frac{-\theta^2}{2} ((j-i-1) - 2(j-i) + (j-i+1)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\theta}{2} ((j-i-1) - 4(j-i) + 3(j-i+1)) - (j-i+1) \right] \\ &+ \partial_{xx}^2 Y(t^n, x_i) \frac{\Delta x^2}{2} \left[\frac{-\theta^2}{2} ((j-i-1)^2 - 2(j-i)^2 + (j-i+1)^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\theta}{2} ((j-i-1)^2 - 4(j-i)^2 + 3(j-i+1)^2) - (j-i+1)^2 \right], \end{aligned}$$

avec :

$$\mathcal{R}_i^n = -\frac{(1-\theta)(2-\theta)}{2\Delta t} \bar{\mathcal{R}}_{i,j+1}^n - \frac{\theta(2-\theta)}{\Delta t} \bar{\mathcal{R}}_{i,j}^n + \frac{\theta(1-\theta)}{2\Delta t} \bar{\mathcal{R}}_{i,j-1}^n,$$

et :

$$\bar{\mathcal{R}}_{i,k}^n = \int_{x_i}^{x_k} \frac{(x_k - z)^2}{2} Y^{(3)}(t^n, z) dz.$$

D'où, après simplifications à l'intérieur des différents crochets grâce à (4.19b) :

$$\mathcal{E}_i^n(\Delta t, \Delta x) = \underbrace{[\partial_t Y + \mathcal{U} \partial_x Y]}_{=0}(t^n, x_i) + \frac{\Delta t}{2} \underbrace{[\partial_{tt}^2 Y - \mathcal{U}^2 \partial_{xx}^2 Y]}_{=0}(t^n, x_i) + \mathcal{R}_i^n + \mathcal{O}(\Delta t^2).$$

En effet, Y étant solution de (4.6), on a, par dérivation par rapport à t et à x , $\partial_{tt}^2 Y = -\mathcal{U} \partial_{tx}^2 Y$ et $\partial_{ix}^2 Y = -\mathcal{U} \partial_{xx}^2 Y$, ce dont on déduit que Y est bien solution de l'équation des ondes 1D : $\partial_{tt}^2 Y - \mathcal{U}^2 \partial_{xx}^2 Y = 0$.

En supposant $Y^{(3)}$ bornée, on majore le terme intégral comme suit :

$$|\mathcal{R}_i^n| \leq \frac{\Delta x^3}{12\Delta t} \|Y^{(3)}\|_\infty \left[(1-\theta)(2-\theta)|j+1-i|^3 + 2\theta(2-\theta)|j-i|^3 + \theta(1-\theta)|j-i-1|^3 \right], \quad (4.20)$$

compte-tenu encore une fois que $x_k - x_i = (k-i)\Delta x$. On rappelle que le but est de montrer que le second membre tend vers 0 lorsque $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$. On pourrait penser que le crochet est borné, engendrant une erreur en $\frac{\Delta x^3}{\Delta t}$, ce qui est l'erreur que l'on attendrait pour un ordre 2 sur l'étape d'interpolation, par analogie avec [71]. Cependant, on a d'une part $j-i = \lfloor -\lambda \rfloor$ d'après (4.19a), et d'autre part, θ fonction de λ via (4.19b). Le crochet joue donc un rôle non négligeable ici. En particulier, il est à noter que :

$$\theta \underset{\lambda \rightarrow 0_+}{\sim} \lambda \rightarrow 0 \text{ et } 1-\theta \underset{\lambda \rightarrow 0_-}{\sim} -\lambda \rightarrow 0.$$

On conserve donc dans l'inégalité (4.20) les termes θ et $1 - \theta$. En revanche, on majore $2 - \theta$ par 2 car $\theta \in [0, 1]$. Il vient donc :

$$|\mathcal{R}_i^n| \leq \frac{\Delta x^3}{12\Delta t} \left\| Y^{(3)} \right\|_{\infty} \left[2(1 - \theta) |[-\lambda] + 1|^3 + 4\theta |[-\lambda]|^3 + \theta(1 - \theta) |[-\lambda] - 1|^3 \right]. \quad (4.21)$$

Pour prouver la consistance du schéma, on va montrer que le second membre tend vers 0, en étudiant la vitesse de convergence. Comme il n'y a aucune contrainte de stabilité, les deux paramètres Δt et Δx sont indépendants. On va donc montrer dans un premier temps que lorsque Δt et Δx sont liés, on a bien convergence vers 0. On aboutit ensuite à la même conclusion pour le cas général $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$, en s'inspirant du cas lié.

Supposons donc que l'on a $\Delta t = \Delta x^\alpha$ pour $\alpha > 0$ fixé et prouvons que le second membre dans (4.21) tend vers 0 lorsque $\Delta x \rightarrow 0$. On distingue trois cas :

- ① $0 < \alpha < 1$: alors $\lambda = \mathcal{U}\Delta x^{\alpha-1} \rightarrow \infty$. Comme $\theta \in [0, 1]$, le comportement de θ ne joue pas et on majore θ et $1 - \theta$ par 1. Comme $[-\lambda] \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} -\lambda$, on constate que chacun des trois termes du second membre de (4.21) est équivalent (à une constante multiplicative près) à :

$$\frac{\Delta x^3}{\Delta t} |[-\lambda]|^3 = \Delta x^{3-\alpha} |[-\mathcal{U}\Delta x^{\alpha-1}]|^3 \sim |\mathcal{U}|^3 \Delta x^{2\alpha} \rightarrow 0.$$

- ② $\alpha = 1$: alors $\lambda = \mathcal{U}$ est une constante, ce qui est également le cas du crochet dans (4.21). Le terme en facteur devient Δx^2 , ce qui assure la convergence.
- ③ $\alpha > 1$: dans ce cas, $\lambda = \mathcal{U}\Delta x^{\alpha-1} \rightarrow 0$. C'est ici que l'on utilise le comportement asymptotique de θ . On suppose donc λ suffisamment petit ($|\lambda| < 1$).
- pour $\mathcal{U} > 0$, chaque terme du second membre de (4.21) soit vaut 0 (car $[-\lambda] + 1 = 0$), soit est borné par $\theta\Delta x^{3-\alpha}$. On utilise alors l'équivalent :

$$\frac{\theta}{\Delta x^{\alpha-3}} \underset{\lambda \rightarrow 0_+}{\sim} \mathcal{U}\Delta x^2.$$

- pour $\mathcal{U} < 0$, on a de même des termes nuls ($[-\lambda] = 0$) et d'autres bornés par $(1 - \theta)\Delta x^{3-\alpha}$. Avec :

$$\frac{1 - \theta}{\Delta x^{\alpha-3}} \underset{\lambda \rightarrow 0_-}{\sim} |\mathcal{U}|\Delta x^2,$$

on conclut à la convergence du second membre vers 0.

En résumé, on a pour erreur de troncature :

- ① $\mathcal{E}_i^n(\Delta t, \Delta t^{1/\alpha}) = \mathcal{O}(\Delta t^2), \alpha \leq 1$;
- ② $\mathcal{E}_i^n(\Delta x^\alpha, \Delta x) = \mathcal{O}(\Delta x^2), \alpha > 1$.

Dans le cas général, *i.e.* $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ indépendamment l'un de l'autre, on reprend les mêmes arguments, en utilisant soit le fait que $\lambda \rightarrow 0$, soit le comportement de θ au voisinage de 0 et en faisant apparaître une puissance pertinente de λ . Prenons par exemple le premier terme dans le second membre de (4.21), à savoir :

$$\frac{\Delta x^3}{\Delta t} (1 - \theta) |[-\lambda] + 1|^3.$$

Ce terme peut être écrit, à Δt fixé :

$$|\mathcal{U}|^3 \Delta t^2 (1 - \theta) \left| \frac{\lfloor -\lambda \rfloor + 1}{\lambda} \right|^3,$$

ce qui donne un ordre en $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ à convergence lorsque $\Delta x \rightarrow 0$ ($\lambda \rightarrow \infty$). Mais le terme peut également s'écrire à Δx fixé :

$$|\mathcal{U}| \Delta x^2 (1 - \theta) \frac{|\lfloor -\lambda \rfloor + 1|^3}{|\lambda|}.$$

Ce terme est nul pour $\lambda > 0$ car $\lfloor -\lambda \rfloor = -1$, et est en $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ pour $\lambda < 0$ lorsque $\Delta t \rightarrow 0$ ($\lambda \rightarrow 0$), du fait que $1 - \theta \sim -\lambda$. On procède de même pour les deux autres termes de (4.21). En conclusion, on a :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathcal{E}(\Delta t, \Delta x) = \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad \text{et} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \mathcal{E}(\Delta t, \Delta x) = \mathcal{O}(\Delta t^2).$$

Pour MOC_d, les calculs sont similaires, avec :

$$\mathcal{E}_i^n(\Delta t, \Delta x) = -\frac{\theta(1 + \theta)}{2\Delta t} \mathcal{R}_{i,j}^n - \frac{(1 - \theta^2)}{\Delta t} \mathcal{R}_{i,j+1}^n + \frac{\theta(1 - \theta)}{2\Delta t} \mathcal{R}_{i,j+2}^n + \mathcal{O}(\Delta t^2).$$

On conclut donc de manière identique.

Bilan

Le schéma MOC_g défini par (4.19) présente donc de nombreuses propriétés, dont une consistance et une stabilité inconditionnelles. Cependant, il ne préserve pas le principe du maximum, créant des instabilités numériques dans certaines configurations (cf. FIG. 4.8a). Cela s'explique par la présence d'une dérivée d'ordre impair (3) comme terme principal de l'erreur de troncature, ce qui induit de la dispersion. En développant à l'ordre 3, il apparaît en effet dans l'erreur de troncature le terme :

$$\frac{\Delta x^3}{6\Delta t} \theta(1 - \theta^2) \partial_{x^3}^3 \mathcal{Y}(t^n, x_i).$$

Il en est de même pour le schéma MOC_d. On donne dans le paragraphe suivant une interprétation géométrique de ce phénomène, tout en proposant d'allier les avantages des deux schémas afin de garantir le principe du maximum. On conserve ainsi la majorité des propriétés évoquées précédemment. On perd toutefois la conservativité (qui n'était pas primordiale ici puisque la finalité est de traiter une équation d'advection et non de conservation) et la linéarité à travers la stratégie de choix proposée. On obtient toutefois un schéma explicite, inconditionnellement stable et consistant.

4.3.4 Traitement du phénomène de dispersion : combinaison des deux schémas

Une première idée (basée sur une condition suffisante)

Les schémas MOC_g et MOC_d étant définis, l'idée de base de MOC_2 est de les combiner afin de préserver le principe du maximum global :

$$\forall i \in \{1, \dots, N_x\}, Y_i^{n+1} \in \left[\min_k Y_k^n, \max_k Y_k^n \right]. \quad (4.22)$$

Pour cela, en chaque nœud, on choisit l'un ou l'autre schéma pour calculer $Y_i^{n+1} = \mathcal{Y}_l(\theta_{ij}^n)$, $l \in \{g, d\}$, sous réserve que le schéma MOC_l satisfasse la condition (**suffisante**) locale :

$$\mathcal{Y}_l(\theta_{ij}^n) \in [\min(Y_j^n, Y_{j+1}^n), \max(Y_j^n, Y_{j+1}^n)]. \quad (4.23)$$

Pour déterminer les configurations dans lesquelles \mathcal{Y}_g et \mathcal{Y}_d satisfont (4.23), revenons sur les définitions (4.17a) et (4.18a) des formules d'interpolation. Analytiquement, on dispose de deux combinaisons linéaires, dans lesquelles Y_j^n et Y_{j+1}^n ont des coefficients positifs, et le dernier terme, à savoir Y_{j-1}^n ou Y_{j+2}^n , a un coefficient négatif (le même). C'est pour cette raison que le résultat peut être une valeur qui ne vérifie pas (4.23) (cf. FIGS. 4.3). Sur la figure 4.3a, l'image par la fonction⁹ $\mathcal{Y}_g(\theta_j(x))$ de l'intervalle $[x_j, x_{j+1}[$ auquel appartient $\hat{\xi}_i^n$ est $[Y_j, Y_{j+1}[$, ce qui n'est pas le cas pour $\mathcal{Y}_d(\theta_j(x))$, qui peut renvoyer une valeur trop faible. La figure 4.3b donne de même une configuration où les conclusions sont inversées.

On peut interpréter géométriquement ce qui précède. Dans le plan (x, Y) , on pose $\mathbf{X}_k = (x_k, Y_k^n)$, $k \in \{j-1, j, j+1, j+2\}$ et $\mathbf{X}_l^\theta = (\hat{\xi}_i^n, \mathcal{Y}_l(\theta_{ij}^n))$, $l \in \{g, d\}$. On vérifie que :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_g^\theta &= -\frac{\theta_{ij}^n(1-\theta_{ij}^n)}{2}\mathbf{X}_{j-1} + \theta_{ij}^n(2-\theta_{ij}^n)\mathbf{X}_j + \frac{(1-\theta_{ij}^n)(2-\theta_{ij}^n)}{2}\mathbf{X}_{j+1}, \\ \mathbf{X}_d^\theta &= \frac{\theta_{ij}^n(1+\theta_{ij}^n)}{2}\mathbf{X}_j + (1-\theta_{ij}^n)(1+\theta_{ij}^n)\mathbf{X}_{j+1} - \frac{\theta_{ij}^n(1-\theta_{ij}^n)}{2}\mathbf{X}_{j+2}. \end{aligned}$$

Ainsi, les abscisses $\{x_{j-1}, x_j, \hat{\xi}_i^n, x_{j+1}\}$ vérifient les mêmes relations que les ordonnées $\{Y_{j-1}^n, Y_j^n, Y_i^{n+1}, Y_{j+1}^n\}$. Cela prouve donc que le point \mathbf{X}_g^θ est barycentre des points \mathbf{X}_{j-1} , \mathbf{X}_j et \mathbf{X}_{j+1} . Il en est de même pour \mathbf{X}_d^θ par rapport aux points \mathbf{X}_j , \mathbf{X}_{j+1} et \mathbf{X}_{j+2} .

Lorsque les trois points sont alignés, le barycentre est situé sur la même droite et (4.23) est nécessairement vérifié. Il n'y a donc **pas de dégénérescence** des schémas. En cas de non-alignement, le barycentre se situe en dehors du triangle formé par les trois points, dans le demi-plan de frontière $(\mathbf{X}_j\mathbf{X}_{j+1})$ et ne contenant pas le point \mathbf{X}_{j-1} , du fait que ce dernier point a un poids négatif contrairement aux deux autres points – cf. FIG. 4.4. Ce constat corrobore le théorème de Godunov [58, Th. 16.1] : un schéma linéaire d'ordre 2 ne peut être monotone. Or la monotonie entraîne le principe du maximum faible (4.23), qui lui-même implique le principe du maximum fort (4.22).

⁹ On note ici $\theta_j(x) = \frac{x_{j+1}-x}{\Delta x}$ pour $x \in [x_j, x_{j+1}]$, de sorte que $\theta_{ij}^n = \theta_j(\hat{\xi}_i^n)$.

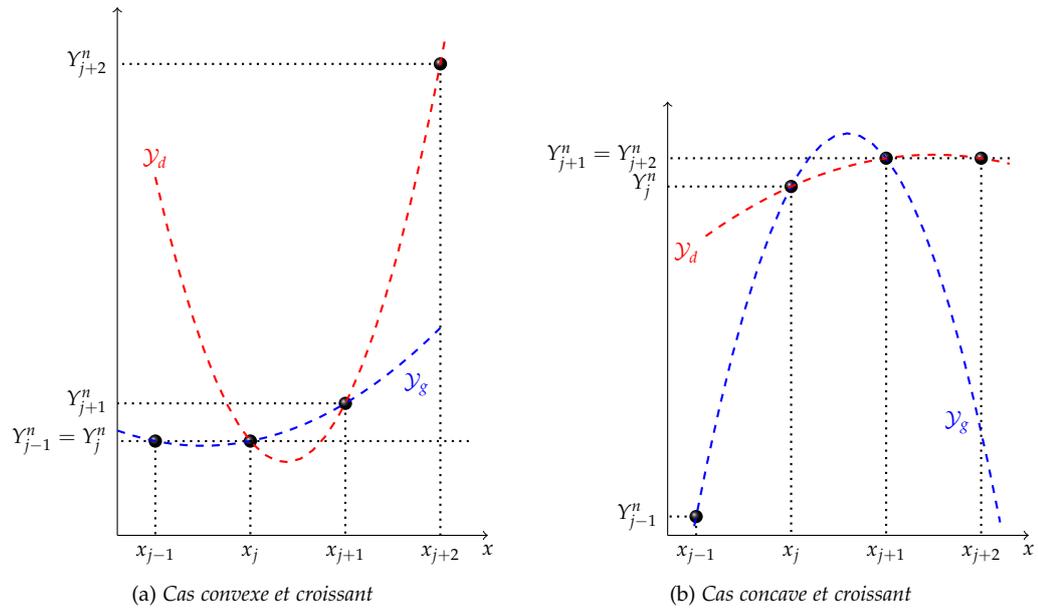


FIG. 4.3 – Configurations de nœuds pouvant violer le principe du maximum

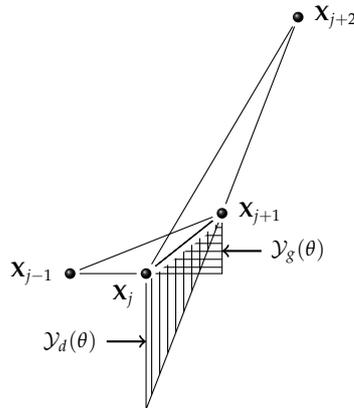


FIG. 4.4 – Lieux des barycentres $(\xi, \mathcal{Y}_l(\theta))$, $l \in \{g, d\}$

Y_{j-1}^n	$-\infty$	$4Y_j^n - 3Y_{j+1}^n$	$2Y_j^n - Y_{j+1}^n$	Y_{j+1}^n	$+\infty$
ϑ_g	$\frac{1}{2}$	\downarrow 0	\searrow $-\infty$	\downarrow 1	\searrow $\frac{1}{2}$

FIG. 4.5 – Tableau de variations de $\vartheta(Y_{j-1}^n)$ dans le cas $Y_j^n < Y_{j+1}^n$

Pour que la contrainte (4.23) soit vérifiée, il **suffit** d'imposer que la fonction polynomiale (on reprend cette fois-ci les formules (4.17b) et (4.18b) pour \mathcal{Y}_g et \mathcal{Y}_d) de degré 2 n'atteigne pas son extremum dans l'intervalle $[0, 1]$, qui est l'équivalent en la variable θ de $[x_j, x_{j+1}]$. En effet, la fonction \mathcal{Y}_l y est alors strictement monotone et l'image de $[0, 1]$ par \mathcal{Y}_l est $[Y_j^n, Y_{j+1}^n]$ (ou $[Y_{j+1}^n, Y_j^n]$) du fait que $\mathcal{Y}_l(0) = Y_{j+1}^n$ et $\mathcal{Y}_l(1) = Y_j^n$.

En considérant l'expression (4.17b), on voit que la fonction \mathcal{Y}_g atteint son extremum (maximum ou minimum selon le signe du coefficient de θ^2 , qui s'avère être la concavité discrète de la solution) en :

$$\theta_g = \frac{Y_{j-1}^n - 4Y_j^n + 3Y_{j+1}^n}{2(Y_{j-1}^n - 2Y_j^n + Y_{j+1}^n)} = \frac{1}{2} + \frac{Y_{j+1}^n - Y_j^n}{Y_{j-1}^n - 2Y_j^n + Y_{j+1}^n} = \vartheta_g(Y_{j-1}^n).$$

Étant données les valeurs Y_{j+1}^n et Y_j^n , on détermine les valeurs de Y_{j-1}^n telles que $\vartheta_g(Y_{j-1}^n) \notin [0, 1]$ en dressant le tableau de variations de ϑ_g (cf. FIG. 4.5).¹⁰ Pour le cas $Y_j^n = Y_{j+1}^n$ qui sera évoqué plus loin, on a $\vartheta_g(Y_{j-1}^n) = \frac{1}{2}$ quel que soit Y_{j-1}^n , ce qui signifie que l'extremum est nécessairement atteint sur $[0, 1]$. Pour tous les autres cas, il vient :

$$\begin{aligned} \vartheta_g \notin [0, 1] &\iff Y_{j-1}^n \in [\min(Y_{j+1}^n, 4Y_j^n - 3Y_{j+1}^n), \max(Y_{j+1}^n, 4Y_j^n - 3Y_{j+1}^n)], \\ &\iff Y_{j+1}^n - Y_{j-1}^n \text{ et } 3Y_{j+1}^n - 4Y_j^n + Y_{j-1}^n \text{ de même signe.} \end{aligned} \quad (4.24g)$$

On obtient de la même manière :

$$\begin{aligned} \theta_d = \frac{Y_{j+2}^n - Y_j^n}{2(Y_j^n - 2Y_{j+1}^n + Y_{j+2}^n)} &\notin [0, 1] \\ &\iff Y_{j+2}^n \in [\min(Y_j^n, 4Y_{j+1}^n - 3Y_j^n), \max(Y_j^n, 4Y_{j+1}^n - 3Y_j^n)], \\ &\iff Y_{j+2}^n - Y_j^n \text{ et } -Y_{j+2}^n + 4Y_{j+1}^n - 3Y_j^n \text{ de même signe.} \end{aligned} \quad (4.24d)$$

Cela revient, étant donnés Y_{j+1}^n et Y_j^n , à ne pas avoir Y_{j-1}^n et Y_{j+2}^n trop grands ou trop petits (cf. FIG. 4.6a). Analysons ces deux contraintes. Par un développement limité autour de (t^n, x_j) de la solution exacte (supposée de classe \mathcal{C}^2 au voisinage du point), la condition (4.24g) est équivalente à :

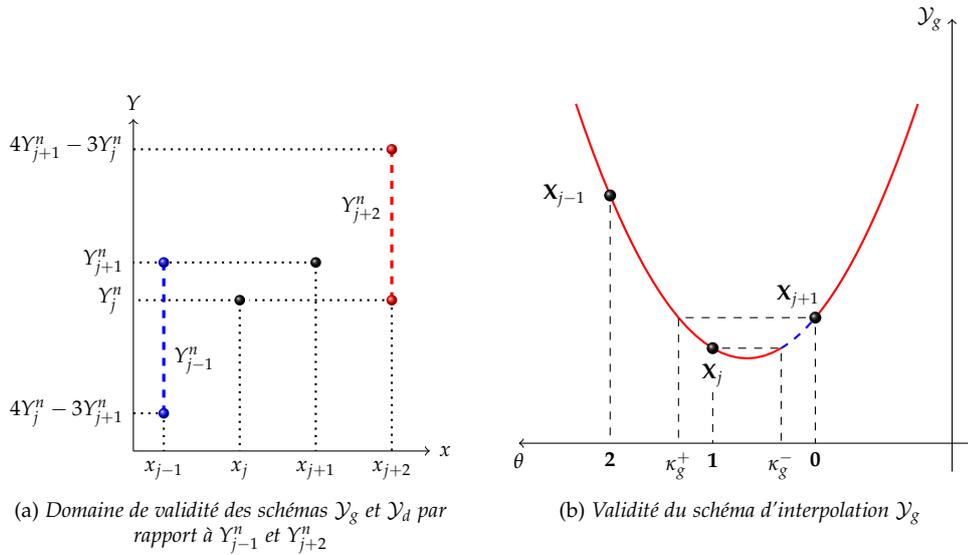
$$\left(2\Delta x \partial_x Y(t^n, x_j) + \mathcal{O}(\Delta x^3)\right) \left(2\Delta x \partial_x Y(t^n, x_i) + 2\Delta x^2 \partial_{xx}^2 Y(t^n, x_i) + \mathcal{O}(\Delta x^3)\right) \geq 0,$$

soit :

$$[\partial_x Y(t^n, x_j)]^2 + \Delta x \partial_x Y(t^n, x_j) \partial_{xx}^2 Y(t^n, x_j) + \mathcal{O}(\Delta x^2) \geq 0. \quad (4.25)$$

Une première remarque est que si $Y(t^n, \cdot)$ n'admet pas d'extremum en x_j , le terme dominant est strictement positif et **la contrainte est vérifiée asymptotiquement** pour $\Delta x \rightarrow 0$. Par ailleurs, lorsque la solution est croissante et convexe en x_j , ou décroissante et concave, le second terme est également positif, d'où les configurations dans lesquelles le schéma \mathcal{Y}_g est **parfaitement adapté** (cf. FIG. 4.3a).

¹⁰ Le cas $Y_{j-1}^n = 2Y_j^n - Y_{j+1}^n$ (valeur interdite dans le tableau de variations) correspond à l'alignement des trois points, déjà évoqué précédemment et pour lequel le principe du maximum local (4.23) est vérifié.


 FIG. 4.6 – Deux critères de validité des schémas \mathcal{Y}_g et \mathcal{Y}_d

De même, on obtient pour la contrainte (4.24d) :

$$[\partial_x Y(t^n, x_{j+1})]^2 - \Delta x \partial_x Y(t^n, x_{j+1}) \partial_{xx}^2 Y(t^n, x_{j+1}) + \mathcal{O}(\Delta x^2) \geq 0. \quad (4.26)$$

Ce sont cette fois-ci les cas croissant-concave ou décroissant-convexe en x_{j+1} qui conviennent (cf. FIG. 4.3b).

Stratégie de choix

Le dernier point de la construction de notre schéma consiste à établir la stratégie de choix des schémas lorsqu'en un nœud, les deux formules sont **admissibles** au sens où elles préservent le principe du maximum local. La figure 4.6a donne les domaines de validité des deux formules d'interpolation en termes de Y_{j-1}^n et Y_{j+2}^n . En particulier, lorsque $Y_j^n = Y_{j+1}^n$, il faut que $Y_{j-1}^n = Y_j^n$ ou $Y_{j+2}^n = Y_{j+1}^n$. Le cadre de la modélisation des bulles est parfaitement adapté, puisque les données sont des fonctions égales à 1 ou à 0 sur de larges intervalles, ce qui assure que cette dernière condition est réalisée. On rappelle que tous les raisonnements précédents sont basés sur une régularité supposée de la solution (au moins \mathcal{C}^2).

Le schéma repose sur l'hypothèse qu'en chaque nœud, l'une au moins des deux contraintes (4.24g-4.24d) est vérifiée, ce qui semble être envisageable si l'on raffine suffisamment, comme le montrent les développements limités ci-dessus. La non-réalisation de cette hypothèse peut d'ailleurs ne pas être préjudiciable, puisque le principe du maximum local (4.23) peut être brisé sans que le principe global (4.22) le soit (les zones « à risques » sont les voisinages des extrema globaux de la solution).

Ainsi, en excluant le cas pathologique où aucune contrainte n'est satisfaite, deux cas peuvent se produire :

- ① Soit une seule des deux contraintes est satisfaite, auquel cas on choisit pour ce nœud le schéma correspondant ;

② Soit les deux contraintes sont vérifiées (ce qui se produit dans la majorité des cas compte-tenu de (4.25) et (4.26)) et il faut faire une sélection. Comme on le verra dans la partie numérique, ce choix influe de manière non négligeable sur la solution.

- ❶ En premier lieu, on peut utiliser une approche géométrique basée sur les considérations suivantes : d'une part, le point $\hat{\xi}_i^n$ se situe dans l'intervalle $[x_j, x_{j+1}]$, et d'autre part, la formule \mathcal{Y}_g fait intervenir x_{j-1} , x_j et x_{j+1} tandis que ce sont les nœuds x_j , x_{j+1} et x_{j+2} qui sont impliqués dans \mathcal{Y}_d . On peut donc adopter la stratégie suivante : si $\hat{\xi}_i^n$ est plus proche de x_{j-1} ($\theta_{ij}^n > 1/2$), on choisit d'appliquer \mathcal{Y}_g alors que dans le cas où $\theta_{ij}^n \leq 1/2$, on choisit \mathcal{Y}_d par proximité de x_{j+2} .
- ❷ Une seconde approche est de s'inspirer de la « physique » sous-jacente au problème, à savoir le transport de \mathcal{Y} . D'où l'idée d'utiliser le schéma amont (\mathcal{Y}_g si $U_j^n > 0$, \mathcal{Y}_d si $U_j^n < 0$) dans les cas où celui-ci est admissible, afin d'aller chercher l'information en remontant le flot.
- ❸ Au contraire, dans l'esprit du schéma anti-dissipatif de Després et Lagoutière (cf. § 4.2), on peut privilégier le schéma aval dès que cela est possible. Comme on le verra dans le paragraphe 4.3.5 dédié aux simulations numériques, ces deux stratégies sont similaires et engendrent des erreurs non symétriques (cf. FIG. 4.9a).
- ❹ On peut également tenir compte des remarques déduites des développements limités (4.25) et (4.26) des deux contraintes, donnant des configurations plus favorables à l'une ou l'autre formule selon la monotonie et la convexité locale de la solution. Le point délicat est d'évaluer ces deux concepts du point de vue discret. On introduit naturellement les quantités :

$$\begin{aligned} \bullet \quad m_j^+ &= Y_{j+2}^n - Y_j^n, \quad c_j^+ = Y_{j+2}^n - 2Y_{j+1}^n + Y_j^n; \\ \bullet \quad m_j^- &= Y_{j+1}^n - Y_{j-1}^n, \quad c_j^- = Y_{j+1}^n - 2Y_j^n + Y_{j-1}^n. \end{aligned}$$

Ainsi, si $m_j^- c_j^- > 0$ (croissant-convexe ou décroissant-concave au voisinage de x_j), c'est généralement le schéma \mathcal{Y}_g qui est le plus pertinent puisqu'il assure le principe du maximum (cf. FIG. 4.3a). L'utilisation de \mathcal{Y}_d est de même préconisée par l'inégalité $m_j^+ c_j^+ < 0$. Mais ne sachant lequel des deux produits tester, on introduit un coefficient tenant compte des deux contributions, en posant :

$$m_j = \theta_{ij}^n m_j^- + (1 - \theta_{ij}^n) m_j^+ \quad \text{et} \quad c_j = \theta_{ij}^n c_j^- + (1 - \theta_{ij}^n) c_j^+.$$

Comme $m_j = 2\Delta x \partial_x Y(t^n, \hat{\xi}_i^n) + \mathcal{O}(\Delta x^3)$, ce coefficient est représentatif de la monotonie de la solution discrète au voisinage de $\hat{\xi}_i^n$. Idem pour c_j vis-à-vis de la convexité. Ainsi, si $m_j c_j > 0$, on utilise le schéma \mathcal{Y}_g . Si $m_j c_j < 0$, on choisit \mathcal{Y}_d .

- ❺ Toutefois, on remarque que dans les simulations réalisées avec les stratégies ❷ et ❸ (cf. FIG. 4.9b), une perte de précision se produit dans les régions dans lesquelles les schémas sont supposés être les plus adaptés, *i.e.* dans les régions où la solution est croissante et convexe (ou décroissante et concave) pour \mathcal{Y}_g , décroissante et convexe (ou croissante et concave) pour \mathcal{Y}_d . On inverse alors les conclusions du point ❹ : si $m_j c_j > 0$, on utilise le schéma \mathcal{Y}_d et inversement.

- ⑥ Une dernière stratégie consisterait à comparer les erreurs de troncature (explicitées dans le paragraphe **Consistance**), mais cela revient sensiblement à appliquer le point ①.

Notons que dans le cas où la vitesse est constante, θ_{ij}^n est constant sur tout le domaine. La stratégie ① est donc identique soit à la stratégie ②, soit à la stratégie ③, selon la position de θ_{ij}^n par rapport à $\frac{1}{2}$.

On appelle **MOC2** le schéma (4.9) avec (4.14) pour le calcul de la caractéristique et (4.17a) ou (4.18a) pour l'interpolation sous réserve que (4.24g) ou (4.24d) soit vérifiée.

Pour aller plus loin (condition nécessaire et suffisante)

On va ici modifier la notion d'admissibilité des schémas. Le critère (4.24g-4.24d) est indépendant¹¹ de la position θ_{ij}^n du pied de la caractéristique. Cela vient du fait que ces deux contraintes découlent d'une condition suffisante : s'assurer que l'extremum de la parabole est atteint en dehors de $[0, 1]$ est une condition suffisante mais non nécessaire de validité du principe du maximum. On constate en effet sur la figure 4.6b qu'il existe un intervalle sur lequel $\mathcal{Y}_g(\theta) \in [Y_j^n, Y_{j+1}^n]$ bien que l'extremum soit atteint dans l'intervalle $[0, 1]$. Pour déterminer une condition nécessaire et suffisante, on introduit les équations :

$$\mathcal{Y}_g(\theta) = Y_j^n, \quad \mathcal{Y}_d(\theta) = Y_j^n, \quad (4.27a)$$

$$\mathcal{Y}_g(\theta) = Y_{j+1}^n, \quad \mathcal{Y}_d(\theta) = Y_{j+1}^n. \quad (4.27b)$$

Les égalités (4.27a) et (4.27b) ont pour solutions triviales respectives $\theta = 1$ et $\theta = 0$ (qui s'avèrent être les seules dans le cas dégénéré d'alignements des points). Des calculs directs de résolution d'équations du second ordre fournissent les autres solutions respectives :

$$\begin{aligned} \kappa_g^- &= \frac{2(Y_{j+1}^n - Y_j^n)}{Y_{j-1}^n - 2Y_j^n + Y_{j+1}^n}, & \kappa_d^- &= \frac{2(Y_{j+1}^n - Y_j^n)}{Y_j^n - 2Y_{j+1}^n + Y_{j+2}^n}, \\ \kappa_g^+ &= \frac{Y_{j-1}^n - 4Y_j^n + 3Y_{j+1}^n}{Y_{j-1}^n - 2Y_j^n + Y_{j+1}^n}, & \kappa_d^+ &= \frac{Y_{j+2}^n - Y_j^n}{Y_j^n - 2Y_{j+1}^n + Y_{j+2}^n}. \end{aligned}$$

On note les relations $\kappa_l^+ - \kappa_l^- = 1, l \in \{g, d\}$. La condition suffisante $\theta_l \notin [0, 1]$ correspond donc au cas où à la fois $\kappa_l^- \notin [0, 1]$ et $\kappa_l^+ \notin [0, 1]$. On vérifie d'ailleurs par le calcul que la combinaison des deux inégalités $\kappa_g^\#(1 - \kappa_g^\#) \leq 0, \# \in \{-, +\}$, redonne bien la condition (4.24g). Idem pour (4.24d) en remplaçant $\kappa_g^\#$ par $\kappa_d^\#$.

Pour améliorer cette contrainte, on remarque que si l'on a $\theta_{ij}^n \in [0, \kappa_g^-]$ ou si $\theta_{ij}^n \in [\kappa_g^+, 1]$, alors on vérifie l'inégalité (4.23), comme sur la figure 4.6b où, pour \mathbf{X}_g^θ dans la partie hachurée bleue de la parabole, on a bien l'encadrement souhaité. La contrainte de validité du schéma devient donc :

$$\theta_{ij}^n \leq \kappa_g^- \text{ ou } \theta_{ij}^n \geq \kappa_g^+. \quad (4.24g')$$

De manière équivalente, on a également pour l'autre schéma :

$$\theta_{ij}^n \leq \kappa_d^- \text{ ou } \theta_{ij}^n \geq \kappa_d^+. \quad (4.24d')$$

¹¹ On ne fait intervenir θ_{ij}^n que dans la stratégie de choix.

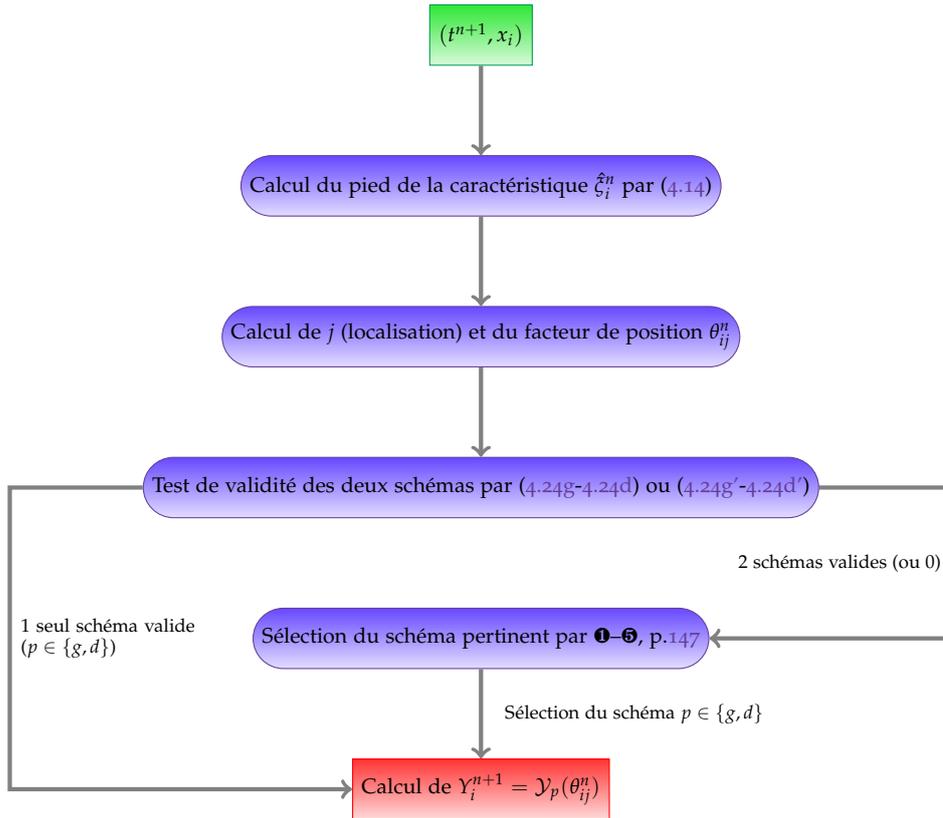


FIG. 4.7 – Description des schémas MOC2 et MOC2'

Les contraintes (4.24g') et (4.24d') dépendent cette fois-ci de la première étape *via* θ_{ij}^n et sont des conditions nécessaires et suffisantes. Le cas pathologique où aucun des schémas ne satisfait le principe du maximum (4.23) correspond à la situation :

$$\theta_{ij}^n \in [\max(0, \kappa_g^-), \min(1, \kappa_g^+)] \cap [\max(0, \kappa_d^-), \min(1, \kappa_d^+)].$$

On appelle donc **MOC2'** le schéma de calcul (4.9), où le pied de la caractéristique est calculé par (4.14) et où l'étape d'interpolation est réalisée grâce aux formules (4.17b) et (4.18b) sous réserve que (4.24g') ou (4.24d') soit vérifiée. Les stratégies de choix énoncées précédemment restent valables pour ce nouveau critère de sélection. L'algorithme est résumé sur la figure 4.7.

Extensions

Les propriétés numériques de ce schéma encouragent à l'étendre à des géométries plus complexes, que ce soit en maillage 1D non uniforme, ou en maillages 2D/3D. Si le premier cas ne semble pas poser de problèmes conceptuels, l'extension aux dimensions supérieures n'est pas immédiate. Considérons les deux étapes de notre méthode, dans le cas d'un maillage (quadrangulaire) cartésien uniforme. Pour l'approximation de la caractéristique, les différences finies étant compatibles avec le type de maillage considéré, le schéma est reductible en l'état. En revanche, avec d'autres géométries, son application est conditionnée au fait que le champ de vitesse soit donné analytiquement (les dérivées

sont ainsi connues). Pour l'étape d'interpolation, l'idée de MOC2 est de combiner 2 schémas d'ordre 2. Le premier point consiste donc à identifier la cellule dans laquelle se situe le pied de la caractéristique (ce qui est encore une fois trivial dans le cas cartésien, mais beaucoup plus complexe dans les autres cas car nécessitant un algorithme de localisation). Pour utiliser une formule d'interpolation à 8 points (pour conserver l'ordre 2 en espace), il faut ensuite étudier les différentes combinaisons de voisinages possibles (une cellule ayant quatre voisins – *i.e.* avec une arête en commun – dans ce type de maillage) et sélectionner la plus pertinente.

4.3.5 Simulations numériques

On présente dans ce paragraphe plusieurs simulations numériques en dimension 1 pour la résolution de l'équation de transport linéaire sans second membre (4.6) à vitesse constante ou non, puis avec second membre (4.4), pour l'équation de Burgers (4.12) et enfin pour le modèle ABV (3.17). Toutes ces simulations ont été réalisées sous MATLAB. Certains de ces résultats font l'objet de l'article [65].

Pour ce qui est des conditions aux limites, aucune n'est à appliquer lorsque la vitesse est nulle au bord (le flot reste dans le domaine). Dans les autres cas, on se place dans le cadre périodique. L'objectif de ce paragraphe est d'une part de comparer les différents concepts évoqués dans la partie théorique (approximation d'ordre 1 ou 2 pour la caractéristique, interpolation linéaire ou quadratique, stratégies de choix des schémas d'interpolation lorsque les deux sont valables) et, d'autre part, de mettre en valeur les propriétés numériques du schéma MOC2.

Revenons sur les différentes possibilités de paramétrer le schéma, ou plus précisément sur la manière de sélectionner une formule d'interpolation (ou l'autre) lorsque les deux sont admissibles. « Admissible » signifie que les conditions de validité fortes (4.24g-4.24d), ou plus faibles (4.24g'-4.24d') sont satisfaites. En théorie, si le premier critère est validé, le second l'est *a fortiori*. La réciproque est fautive, ce qui se traduit par le fait qu'en certains points, un schéma peut être refusé avec le premier critère mais pas avec le second. On rappelle que le second critère est exact (condition nécessaire et suffisante), au contraire du premier (condition suffisante). Numériquement parlant, les tests tendent à montrer que les deux critères sont équivalents, en remarquant toutefois que le second nécessite plus de précautions (traitement des dénominateurs).

Une fois testée la validité des deux schémas, il faut ensuite considérer les différentes stratégies de choix évoquées page 147 : position de θ_{ij}^n (cf. point ❶), privilège donné à l'amont ou l'aval (❷ et ❸), concept de monotonie – convexité en version intuitive ou inversée (❹ et ❺). Nous verrons que les stratégies de choix donnent des résultats qualitativement différents.

Équation d'advection sans terme source

Le premier champ de vitesse considéré est le champ constant $\mathcal{U} = 0,5$. La donnée initiale correspond à la fonction Y_ε^0 (cf. Eq. 3.20) avec $\Lambda = P_5$, $\varepsilon = 0,3$ et $\beta_0 = 0,4$ sur le domaine $\Omega = [-2,2]$. La solution exacte vaut alors :

$$Y(t, x) = Y_\varepsilon^0(x - t\mathcal{U} - 4k), \text{ avec } k = \left\lfloor \frac{x - t\mathcal{U} + 2}{4} \right\rfloor \in \mathbb{Z}.$$

On tient compte ici des conditions aux limites périodiques (la correction $-4k$ permet de se ramener à l'intervalle $[-2,2]$).

Ainsi, après une période complète (*i.e.* avec $N_t \Delta t = |\Omega|/\mathcal{U} = 8$), on retrouve au niveau continu la donnée initiale. Les figures 4.8a et 4.8b mettent en évidence le défaut majeur des schémas linéaires d'ordre 2 MOC_g et MOC_d , qui présentent des oscillations au niveau des plateaux extrêmes. Le principe du maximum n'est alors pas vérifié, ce qui est à l'origine de l'idée de combiner les deux schémas. On a pris ici $\Delta t = 8 \cdot 10^{-2}$ et $\Delta x = 1,6 \cdot 10^{-2}$.

Sur la figure 4.9a, on voit que la stratégie ② privilégiant le schéma amont (lorsque cela est possible) engendre des solutions non symétriques. La dissymétrie se produit principalement au niveau du plateau, comme le montre la figure 4.9b. Ce constat est à l'origine de la stratégie ⑤.

On constate également que le schéma est exact lorsque λ est entier, comme on peut le voir sur la figure 4.10, l'erreur étant de l'ordre du zéro machine. λ vaut 3 sur la figure 4.10, tandis que λ vaut 2,5 pour les autres simulations.

Validation du code pour un second membre non nul

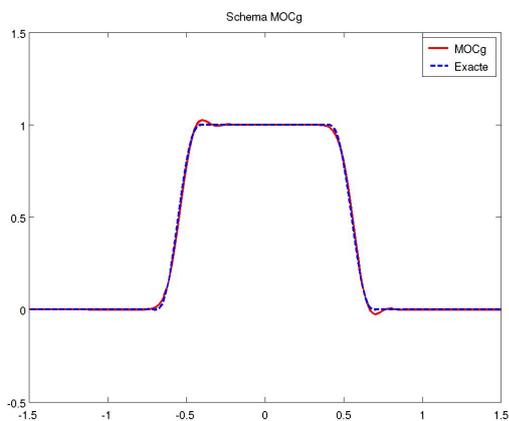
On présente dans ce paragraphe un résultat pour l'équation d'advection avec terme source (4.4a), dont les aspects numériques ont été présentés page 137. Le champ de vitesse est toujours constant ($\mathcal{U} = 0,5$). Le second membre choisi est ici :

$$f(t, x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

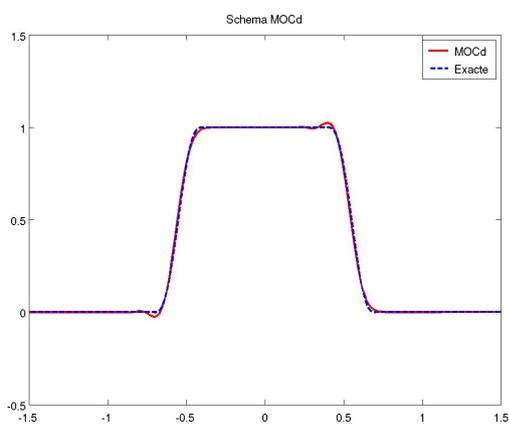
Cette fonction est 4-périodique, de sorte que la solution soit donnée explicitement par :

$$Y(t, x) = Y_\varepsilon^0(x - t\mathcal{U} - 4k) + \frac{2}{\pi\mathcal{U}} \left[\sin \frac{\pi(x - t\mathcal{U})}{2} - \sin \frac{\pi x}{2} \right].$$

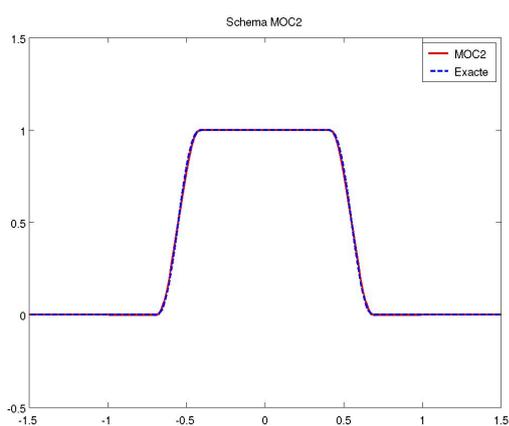
Les paramètres de discrétisation sont ici $N_t = 100$ et $N_x = 450$, et la donnée initiale est celle du paragraphe précédent ($Y_{\varepsilon=0,3}^0$). La solution numérique correspond bien à la solution exacte, malgré des variations brutales en espace, comme le montrent les figures 4.11. On retrouve à l'itération 100 la figure 4.11a. On compare sur la figure 4.12 les différentes formules d'intégration numérique évoquées page 137. La méthode des trapèzes est, comme attendu, la plus précise. La quantité testée ici est l'erreur relative entre les solutions exacte et numérique.



(a) Résultats après une période pour le schéma MOC_g

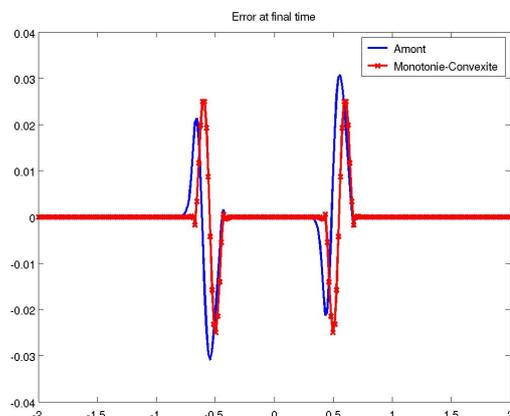


(b) Résultats après une période pour le schéma MOC_d

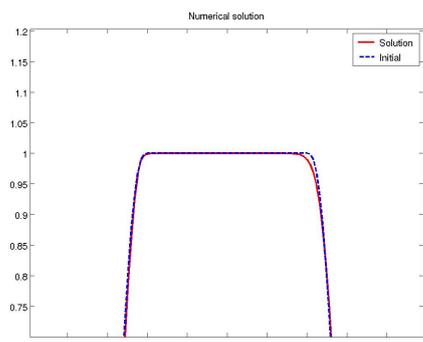


(c) Résultats après une période pour le schéma MOC_2

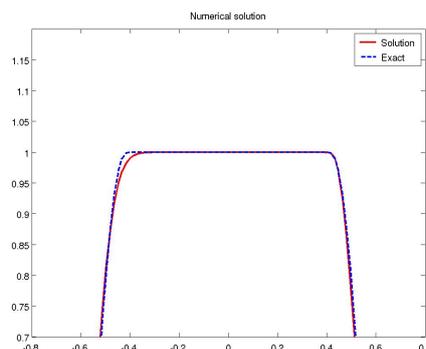
FIG. 4.8 – Phénomène de dispersion avec MOC_g et MOC_d



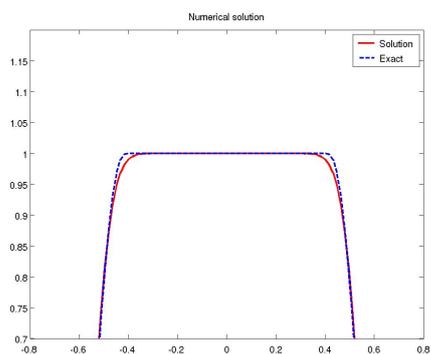
(a) Courbes d'erreur pour la stratégie amont (point ②) et la stratégie monotonie-convexité (point ⑤)



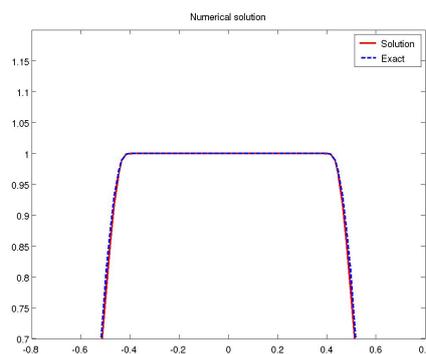
(b) Zoom sur la zone haute : stratégie ②



(c) Zoom sur la zone haute : stratégie ③

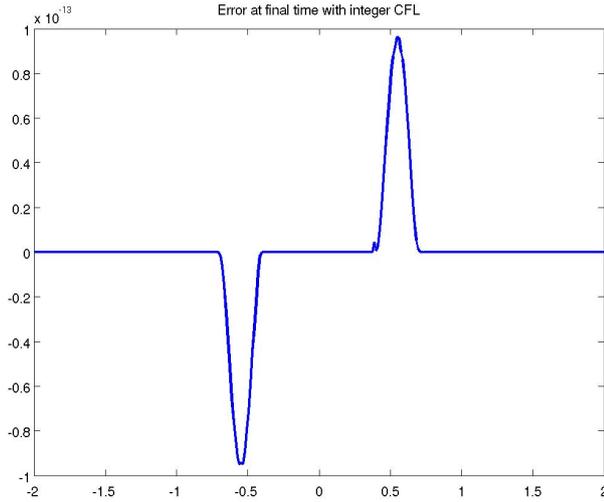


(d) Zoom sur la zone haute : stratégie ④



(e) Zoom sur la zone haute : stratégie ⑤

FIG. 4.9 – Comparaison des différentes stratégies


 FIG. 4.10 – Schéma MOC2 pour $\lambda \in \mathbb{Z}$

Vitesse non constante

Dans les tests précédents, le champ de vitesse était constant : l'étude à l'ordre 2 du calcul de la caractéristique, qui s'est traduit par la formule (4.14), n'a donc pas été mise en valeur, puisque le pied de la caractéristique est donné explicitement par $\tilde{\xi}_i^n = x_i - \Delta t \mathcal{U}$. C'est pourquoi on s'intéresse ici à un champ de vitesse non constant (sans terme source), afin d'évaluer l'apport de l'ordre 2. Considérons ici le champ de vitesse :

$$\mathcal{U}(t, x) = t(x^2 - 4).$$

Cette vitesse est négative et nulle aux extrémités du domaine $[-2, 2]$. On peut alors résoudre explicitement l'équation caractéristique (4.5) avec $s = t$. On a en effet :

$$\frac{t^2 - \tau^2}{2} = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{2 - x}{2 + x} \right) - \frac{1}{4} \ln \left(\frac{2 - \mathcal{X}(\tau; t, x)}{2 + \mathcal{X}(\tau; t, x)} \right).$$

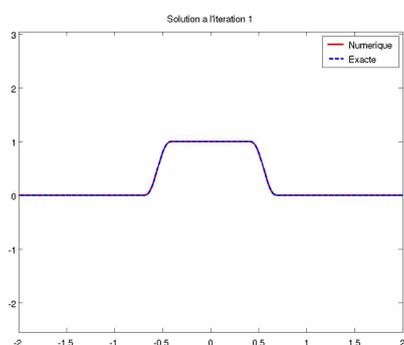
On en déduit :

$$\mathcal{X}(0; t, x) = 2 \frac{x + 2 + e^{-2t^2}(x - 2)}{x + 2 + e^{-2t^2}(2 - x)}.$$

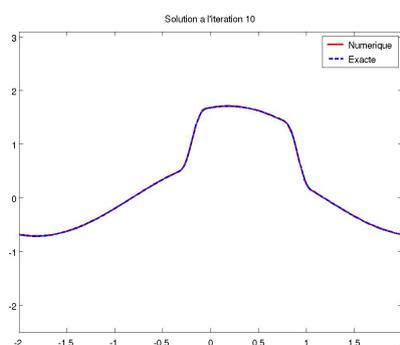
On prend cette fois-ci la condition initiale régulière à support compact :

$$Y^0(x) = \exp \left(\frac{-x^2}{1 - x^2} \right) \mathbf{1}_{]-1, 1[}(x).$$

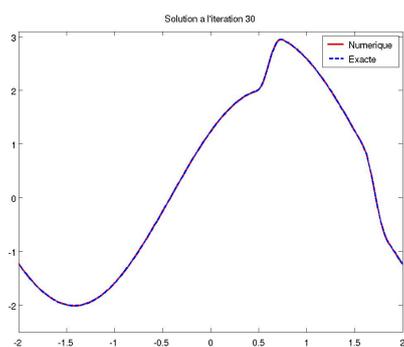
Cette fonction est représentée en pointillés noirs sur la figure 4.13a. On y représente également la solution au temps 0,9. Comme $\mathcal{X}(0; t, x)$ tend vers 2, la solution tend vers 0, avec une contraction de plus en plus importante au voisinage de -2 , ce qui rend alors (à partir du temps 1,1) le schéma imprécis, puisque les variations de la solution se produisent dans un domaine très fin. Le maillage n'arrive alors plus à capter la solution de manière précise.



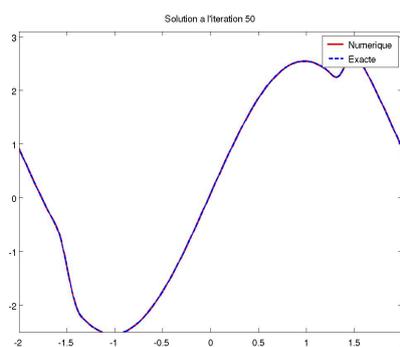
(a) *Itération 1*



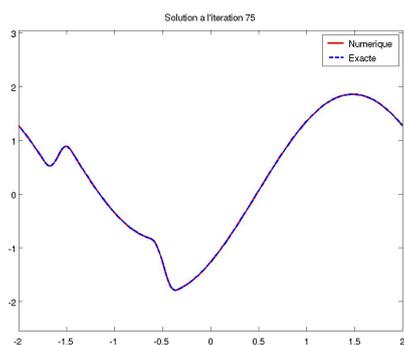
(b) *Itération 10*



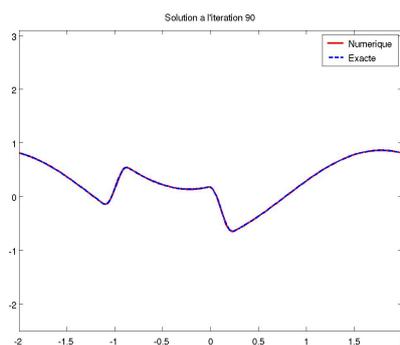
(c) *Itération 30*



(d) *Itération 50*



(e) *Itération 75*



(f) *Itération 90*

FIG. 4.11 – Évolution de la solution pour l'équation avec terme source.

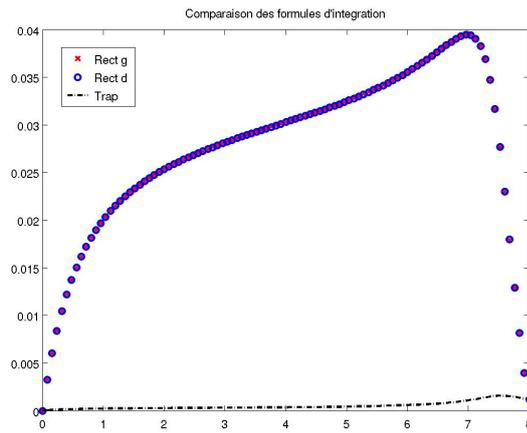


FIG. 4.12 – Courbes d'erreur au cours du temps pour les différentes formules d'intégration du terme source

On compare sur la figure 4.13b les courbes d'erreur en fonction du temps pour les différentes stratégies de choix évoquées précédemment. Y apparaît en particulier l'apport de l'ordre 2 en espace et en temps puisque les erreurs issues des simulations avec approximations linéaires (formules à l'ordre 1 : (4.10) pour le calcul de la caractéristique et (4.16) pour l'étape d'interpolation) sont plus importantes qu'avec les formules à l'ordre 2. À noter que parmi les stratégies de choix de schémas, la stratégie ❶ se révèle plus précise pour ce cas. La figure 4.13c montre quant à elle l'ordre de la méthode pour $\Delta t \propto \Delta x^{1.1}$. On retrouve bien l'ordre 2 par rapport à Δx , comme préconisé dans le paragraphe **Consistance**. Le schéma classique upwind n'est pas utilisable avec ce jeu de paramètres, car la condition CFL n'est pas vérifiée. La stabilité inconditionnelle du schéma MOC2 permet de s'abstraire de cette contrainte.

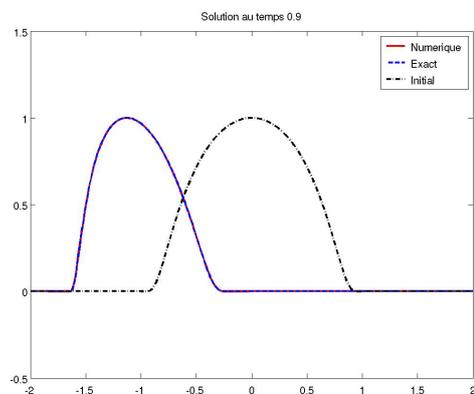
Équation de Burgers

On traite dans ce paragraphe l'équation de Burgers (4.12), qui est une équation de transport non-linéaire. Le champ transporté et le champ de vitesse correspondent à la même variable, d'où l'importance de vérifier la disponibilité des valeurs nécessaires dans les différentes étapes du schéma. La forme particulière que prend le schéma pour le cas de cette équation a été donnée en (4.13). Le terme de dérivée temporelle $\partial_t \mathcal{U}$ y est remplacé par le terme de dérivée spatiale $-(\mathcal{U} \cdot \nabla) \mathcal{U}$ afin de ne pas engendrer un schéma à plusieurs pas en temps. La seule donnée du problème est ici la condition initiale \mathcal{U}^0 . On se place dans le domaine $\Omega = [0, 2]$.

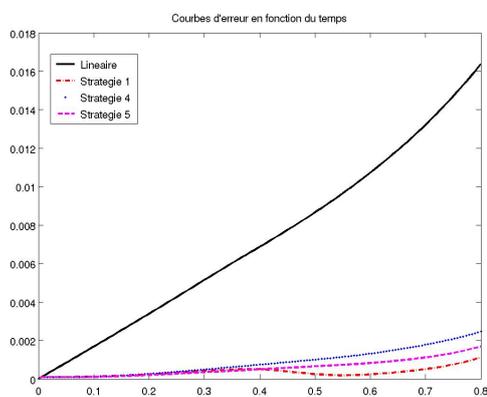
On présente ici les simulations obtenues pour deux conditions initiales distinctes. Pour $\mathcal{U}^0(x) = x$, la solution exacte vaut :

$$\mathcal{U}(t, x) = \frac{x}{1+t}.$$

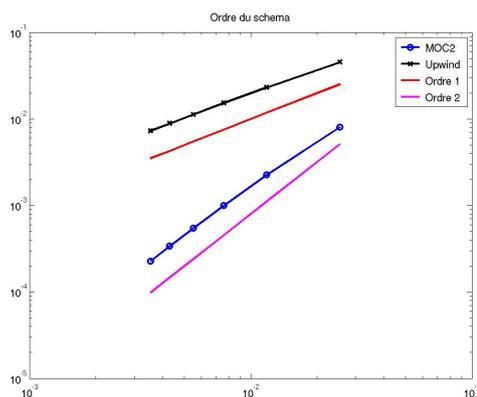
On vérifie la précision du schéma sur la figure 4.14. La convergence est ici indépendante de Δx (les simulations sont réalisées avec seulement dix points en espace!) du fait du caractère linéaire par rapport à x de la solution. L'ordre est bien égal à 2.



(a) Solutions exacte et numérique au temps 0,9



(b) Courbes d'erreur en fonction du temps pour les différents degrés d'interpolation et stratégies de choix



(c) Ordre de la méthode en fonction de Δx – comparaison avec le schéma upwind

FIG. 4.13 – Simulations à vitesse non constante

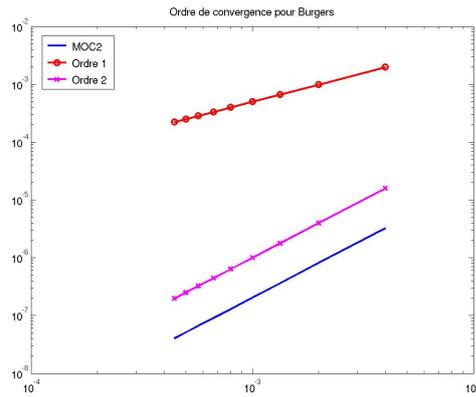


FIG. 4.14 – Ordre de convergence en fonction de Δt pour l'équation de Burgers à donnée linéaire

Intéressons-nous maintenant à un cas pour lequel on ne dispose pas de solution exacte, à savoir avec :

$$\mathcal{U}^0(x) = \exp\left(\frac{-(x-0,5)^2}{x(1-x)}\right) \mathbf{1}_{]0,1[}(x).$$

Du point de vue théorique, le flot caractéristique associé à l'équation de Burgers est donné implicitement par :

$$\mathcal{X}(\tau; s, x) = x + (\tau - s)\mathcal{U}(s, x).$$

La solution vérifie donc :

$$\mathcal{U}(t, x) = \mathcal{U}^0(x - t\mathcal{U}(t, x)).$$

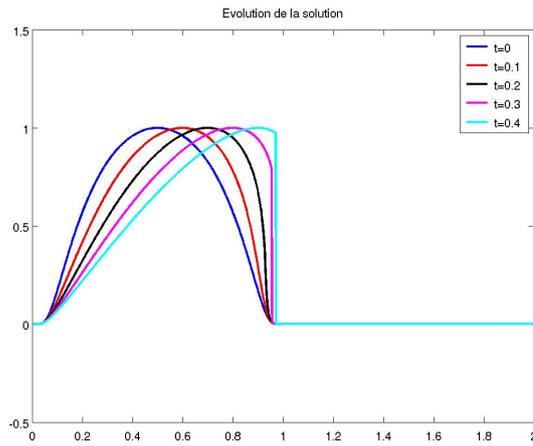
La résolution de cette équation est équivalente au problème de point fixe :

$$\xi = x - t\mathcal{U}^0(\xi),$$

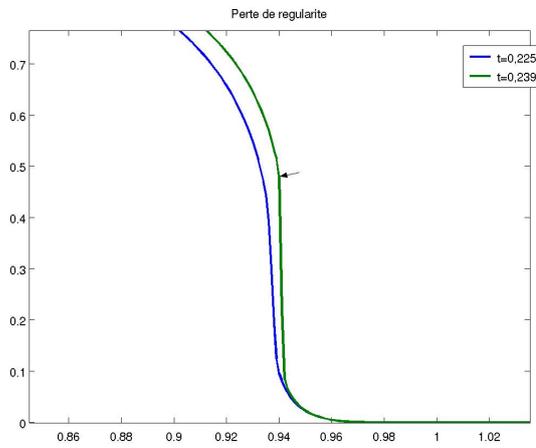
ce qui requiert l'inversion de l'opérateur $\mathcal{Id} + t\mathcal{U}^0$. Dans le cas linéaire, l'inversion était triviale. En revanche, dans le cas général, cet opérateur n'est pas nécessairement inversible pour tout $t > 0$. En particulier, dès que la fonction $(\mathcal{U}^0)'$ prend des valeurs négatives, il existe un temps critique pour lequel certaines courbes caractéristiques se croisent, rendant impossible la résolution du problème (la valeur de la solution au point d'intersection étant égale à plusieurs valeurs de la donnée initiale). Ce temps est donné par [58] :

$$\mathcal{T}_c = \frac{-1}{\min_x (\mathcal{U}^0)'(x)}.$$

Dans notre cas, la fonction \mathcal{U}^0 est décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$, ce qui justifie que la dérivée prend des valeurs négatives. Le minimum de $(\mathcal{U}^0)'$ est atteint en $\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}$ et vaut approximativement 0,2304. La figure 4.15b met en valeur ce phénomène. La solution avant \mathcal{T}_c est régulière (en bleu), ce qui n'est plus le cas pour la courbe verte (solution à un temps postérieur à \mathcal{T}_c). Cette figure, ainsi que la représentation de la solution à différents temps (cf. FIG. 4.15a), mettent en valeur le fait que **le schéma MOC2**, bien que construit sous une hypothèse de régularité de la solution, **peut capturer des chocs** et ainsi traiter des cas irréguliers.

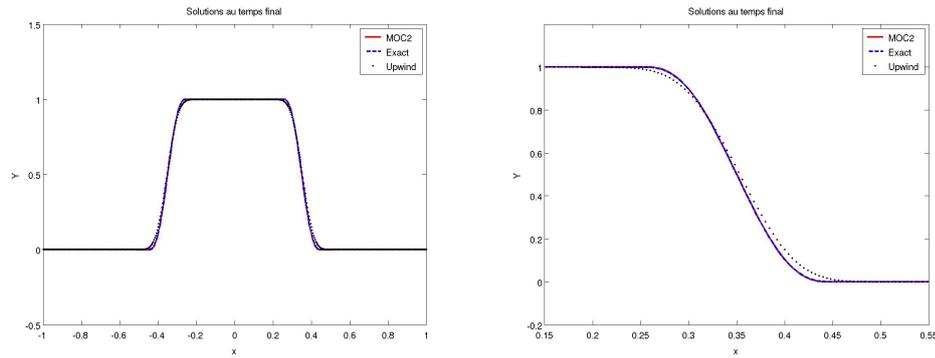


(a) Solution de l'équation de Burgers à des temps successifs



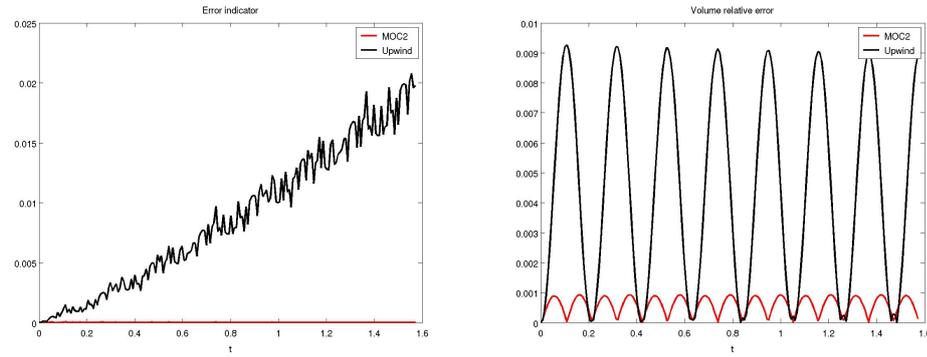
(b) Temps d'explosion

FIG. 4.15 – Équation de Burgers pour une donnée non triviale



(a) Comparaison avec la donnée initiale au temps final

(b) Zoom sur les solutions


 (c) Erreur \mathcal{E}_5 au cours du temps

(d) Erreur relative sur le volume

 FIG. 4.16 – Simulations du modèle ABV pour une régularisation \mathbb{P}_5

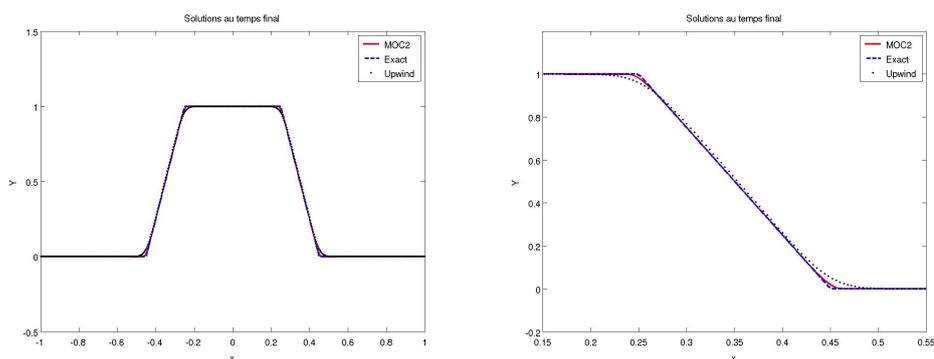
Modèle ABV en dimension 1

Revenons enfin au modèle ABV, qui fait l'objet de cette étude. Le traitement du système (3.17) se fait par l'algorithme suivant pour $\Omega = [-1, 1]$. Étant donnée la solution $(Y_i^n)_i$ au temps t^n , on calcule le champ de vitesse par la formule :

$$U_i^n = \psi(t^n) \Delta x \left[\sum_{j=1}^{i-1} \frac{Y_j^n + Y_{j+1}^n}{2} - \frac{x_i + 1}{2} \sum_{j=1}^{N_x-1} \frac{Y_j^n + Y_{j+1}^n}{2} \right].$$

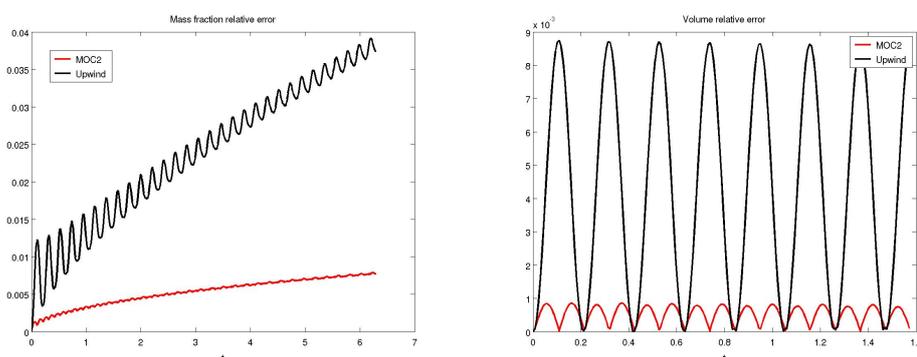
On y utilise la formule des trapèzes pour calculer les intégrales, dans le but de conserver l'ordre 2. On détermine ensuite la solution au temps t^{n+1} en résolvant l'équation d'advection par le schéma MOC2.

Dans le premier test, l'initialisation est faite à l'aide de la fonction Y_ε^0 (cf. Eq. 3.20) avec $\Lambda = P_5$, $\varepsilon = 0,25$ et $\beta_0 = 0,25$. La donnée initiale est suffisamment régulière eu égard aux hypothèses de régularité sous lesquelles le schéma MOC2 a été construit. L'autre paramètre du modèle, à savoir la pulsation ψ , est donné par $\psi(t) = 2 \cos(30t)$, de façon à mettre en valeur le choix du terme « pulsation ».



(a) Comparaison avec la solution exacte au temps final

(b) Zoom sur les solutions



(c) Erreur relative par rapport à la solution exacte au cours du temps

(d) Erreur relative sur le volume

FIG. 4.17 – Simulations du modèle ABV pour une régularisation linéaire

On prend $N_t = 200$ et $N_x = 500$. L'intervalle en temps est pris de sorte que la pulsation réalise des périodes complètes. La solution exacte au temps final n'est autre que la donnée initiale.¹² Les résultats sont présentés sur les figures 4.16. Sur les figures 4.16a et 4.16b, on représente les solutions numériques obtenues avec les schémas MOC2 et upwind que l'on compare à la solution exacte.¹³ Les figures 4.16c et 4.16d montrent respectivement l'évolution d'un indicateur d'erreur sur la solution et de l'erreur relative sur le volume au cours du temps. La solution n'étant pas connue, l'indicateur d'erreur est calculé par rapport au haut β_ε et au bas δ_ε du plateau, lesquels sont donnés par (3.26a) et (3.26b), et est égal à :

$$\mathfrak{E}_5(t^n) = |1 - Y_j^n| + |Y_k^n|,$$

où $\beta_\varepsilon(t^n) \in [x_j, x_{j+1}[$ et $\delta_\varepsilon(t^n) \in [x_k, x_{k+1}[$. Le schéma MOC2 présente ainsi une précision supérieure à celle du schéma upwind, avec une erreur bornée dans le temps. L'erreur en volume est cependant à relativiser, car par un jeu de compensation entre le haut et le bas du plateau, celle-ci peut être faible sans que la solution numérique soit proche de la solution exacte.

¹² Il a été prouvé qu'en dimension 1, la solution de $\text{Abv}[\gamma^0, \psi, \Omega]$ était périodique si ψ était périodique et de moyenne nulle, ce qui est le cas ici.

¹³ La solution exacte n'est connue qu'aux temps $k\mathcal{T}_\psi$, $k \in \mathbb{N}$, \mathcal{T}_ψ étant la période de ψ . Elle y est alors égale à la donnée initiale.

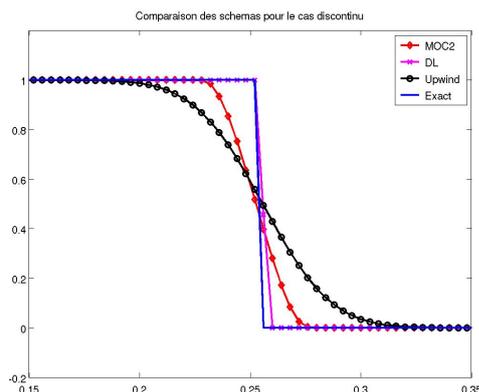


FIG. 4.18 – Simulations du modèle ABV pour une donnée irrégulière

On diminue ensuite la régularité en prenant pour fonction de régularisation $\Lambda = P_1$. On dispose alors d'une expression explicite de la solution exacte (cf. page 117). La figure 4.17b montre un phénomène de diffusion au voisinage des points β_ε et δ_ε plus important que dans le cas P_5 . Cela s'explique par le fait que la solution ne remplit plus les hypothèses de régularité nécessaires pour l'étape d'interpolation. L'erreur reste toutefois notablement inférieure à celle produite par le schéma upwind et croît moins vite, comme le montre la figure 4.17c. Cette figure retrace les simulations sur 800 itérations et 24 périodes.

On teste enfin le schéma sur le cas d'une « bulle » 1D, même s'il n'est pas dédié à la simulation de fonctions discontinues (par construction). On munit le modèle de la condition initiale $\mathbf{1}_{[-0.25,0.25]}(x)$. La comparaison des résultats obtenus par les schémas MOC2, upwind et DL (cf. § 4.2) à la solution exacte est faite sur la figure 4.18. Le schéma DL diffuse sur 1 cellule tandis que les deux autres schémas diffusent sur un plus grand nombre de cellules, le schéma MOC2 restant meilleur que le schéma upwind. Ce résultat était prévisible du fait des caractéristiques de notre schéma.

Conclusion

Le schéma MOC2 est un schéma numérique permettant de simuler les solutions régulières des équations de transport. On a réalisé ici des simulations en dimension 1 pour différentes variantes de cette équation : avec ou sans terme source, à vitesse constante ou non, indépendante ou couplée avec une autre équation. Le principal attrait des méthodes de type MOC est leur stabilité inconditionnelle, qui permet de choisir les paramètres de discrétisation indépendants l'un de l'autre. On obtient ainsi des nombres de Courant parfois élevés, sans pourtant porter préjudice à la précision des simulations. Pour construire ce nouveau schéma, on a cherché à imposer le principe du maximum, qui n'est pas vérifié pour les schémas linéaires d'ordre 2, ce que l'on a réussi à faire ici en couplant deux formules d'interpolation. L'ordre de la méthode est bien égal à 2, ce qui a été mis en évidence dans les différentes situations.

4.4 RAFFINEMENT ADAPTATIF DE MAILLAGES

4.4.1 Motivations

Ce travail reprend les résultats obtenus par *Anouar Mekkas* lors de son stage au CEA [60] en collaboration avec l'ONERA, que nous avons co-encadré avec *Stéphane Dellacherie*, et publiés dans [68]. L'origine de ces recherches est le constat qu'en dimensions 2 et 3, la non-diffusivité du schéma de *Després* et *Lagoutière* ne suffit pas à assurer la précision des simulations, en particulier lorsque l'épaisseur de la bulle devient plus petite que le pas du maillage, ou lorsque les bulles deviennent trop proches (distance entre les bulles inférieure au pas du maillage). C'est le cas par exemple pour le test proposé par *Rider* et *Kothe* [75], à savoir la simulation d'une équation de transport avec pour donnée initiale une sphère (ou un disque), et pour champ de vitesse le champ périodique :¹⁴

$$\mathbf{u}(t, x, y, z) = \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \begin{pmatrix} 2 \sin^2(\pi x) \sin(2\pi y) \sin(2\pi z) \\ -\sin^2(\pi y) \sin(2\pi x) \sin(2\pi z) \\ -\sin(2\pi x) \sin(2\pi y) \sin^2(\pi z) \end{pmatrix}.$$

Le problème rencontré dans la simulation de ce cas-test, comme on le constate sur les figures 4.19, est que la finesse de la « bulle » ne permet plus sa capture par le maillage. Il en résulte alors un morcellement de la matière, qui est un phénomène purement numérique (la fragmentation n'est pas prise en compte dans cette modélisation). De plus, ce cas-test a la propriété d'être périodique : la solution finale doit coïncider avec la donnée initiale, ce que l'on ne retrouve pas sur les figures 4.19.

Il est donc nécessaire de diminuer le pas du maillage. Cependant, compte-tenu des configurations que l'on souhaite simuler dans ce mémoire, **il ne serait pas pertinent** (en termes de coût et de temps de calcul) **de raffiner uniformément le maillage** en tout point. En effet, les fonctions manipulées sont égales à 1 ou à 0 dans la majeure partie du domaine. Ces données sont parfaitement transportées par l'algorithme DL. Les zones « critiques » correspondent donc aux voisinages de l'interface. D'où notre intérêt pour les algorithmes de *Raffinement Adaptatif de Maillages*, désignés par l'acronyme AMR dans la suite.

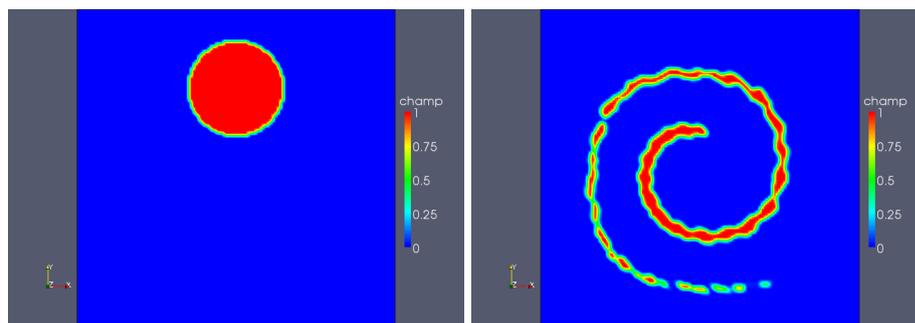
4.4.2 Rappels sur les algorithmes AMR

On se donne pour la suite un maillage cartésien en dimension 2, dont les cellules sont notées $(M_i)_{1 \leq i \leq \mathcal{M}}$. L'union G_0 de ces cellules forme le **maillage grossier**. La structure des algorithmes AMR se compose généralement de deux étapes :

- ❶ Marquage des cellules M_i qui nécessitent un raffinement (zones de fortes variations de la solution, par exemple au voisinage d'une discontinuité) ;
- ❷ Regroupement des cellules marquées en sous-domaines.

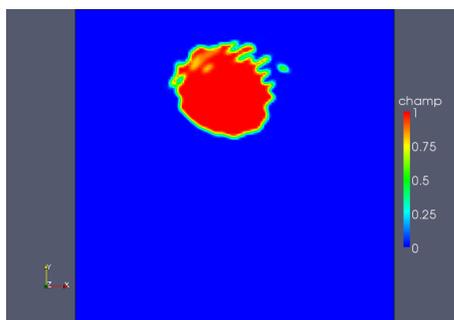
Le point ❶ est réalisé à l'aide d'un critère, appelé *senseur*, qui reflète le comportement local de la solution. Si la valeur de ce senseur dans une cellule dépasse un certain seuil ε fixé par l'utilisateur, alors cette cellule est marquée (le terme anglais consacré est *flagged*).

¹⁴ L'équivalent en dimension 2 est : $\mathbf{u}(t, x, y) = 2 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \begin{pmatrix} -\sin(\pi x) \cos(\pi y) \\ \sin(\pi y) \cos(\pi x) \end{pmatrix}$.

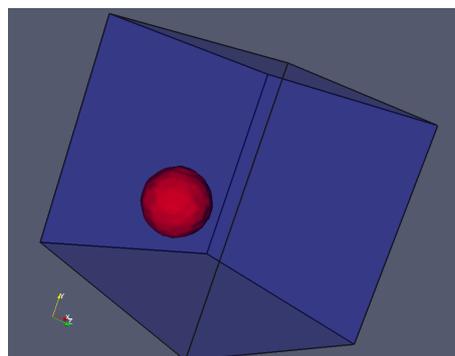


(a) Bulle initiale (disque)

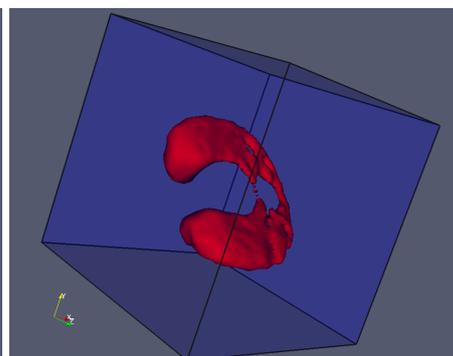
(b) Bulle transportée (disque) à un temps intermédiaire



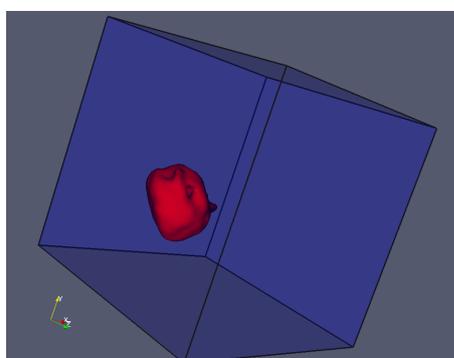
(c) Bulle finale (disque)



(d) Bulle initiale (sphère)



(e) Bulle transportée (sphère) à un temps intermédiaire



(f) Bulle finale (sphère)

FIG. 4.19 – Mises en défaut de l'algorithme

Le senseur peut être adapté à l'équation étudiée. Ici, le senseur utilisé est le suivant, pour la cellule M_i et au temps n :

$$\frac{(\hat{D}_x Y^n)_i + (\hat{D}_y Y^n)_i}{\sup_{m,p} [(\hat{D}_x Y^n)_m + (\hat{D}_y Y^n)_p]},$$

où \hat{D}_z désigne un opérateur discret représentant la dérivée dans la direction z . Les zones de raffinement suivent donc la solution dans son évolution.

Une fois que toutes les cellules à raffiner ont été recensées, on met en œuvre le point ②. Cette étape peut être traitée à l'aide de plusieurs stratégies, qui engendrent autant d'algorithmes différents. Une structure hiérarchisée de sous-domaines (lorsque l'on souhaite plusieurs niveaux de raffinement en fonction des seuils) est ainsi créée, les niveaux correspondant à un taux de raffinement donné (rapport du pas de maillage fin sur le pas du maillage grossier). Il existe deux grandes familles d'algorithmes AMR : les méthodes d'arbres (appelées *tree-based* dans la littérature anglophone) [18] et les méthodes de *patches* (*patch-based*) [8].

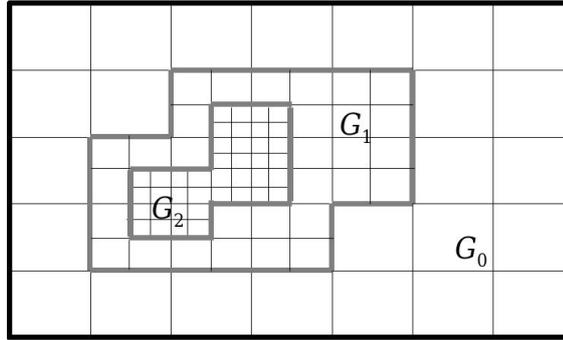
On considère ici un algorithme *patch-based*, où les **patches** sont des ensembles de cellules marquées (rectangles orientés selon les axes du maillage). Il existe de multiples manières de regrouper ces cellules. Le raisonnement est lié à des considérations informatiques. Le but de l'AMR est en effet d'obtenir, à l'aide du même solveur, la même précision qu'en raffinant dans tout le domaine, tout en réduisant le temps et le coût de calcul. Cela requiert d'optimiser le regroupement des cellules marquées en tenant compte des deux contraintes suivantes :

- créer des patches les plus petits possibles pour éviter d'englober des cellules non marquées dans ces patches (rectangulaires) et ainsi éviter des calculs inutiles ;
- créer des patches suffisamment grands pour ne pas multiplier les domaines de calcul.

Ces deux contraintes s'opposent l'une à l'autre, d'où un équilibre à trouver afin de garantir une efficacité optimale. Un moyen d'évaluer l'efficacité d'un tel algorithme est de calculer, pour chaque patch, le rapport de la surface des cellules marquées sur la surface totale du patch. Les bases de l'algorithme utilisé ici (nommé **Grouping-Clustering**) ont été posées par Berger [6, 7], puis formalisées dans [8] en s'inspirant de techniques développées dans le milieu du traitement d'images. On renvoie à ces différents articles pour plus de détails sur la méthode itérative de construction des patches.

On utilise le terme de **patchwork** pour désigner un ensemble de patches ayant le même taux de raffinement. Pour un niveau de raffinement r_l et un temps n (les maillages fins évoluent au cours du temps), on note $G_{l,n}$ le patchwork associé et $(G_{l,n}^k)_{1 \leq k \leq K_{l,n}}$ les patches qui le composent.

Un algorithme AMR ne se limite pas à la construction d'une structure hiérarchisée de maillages. Il comprend aussi la résolution des équations sur chacun des niveaux de maillage, avec la gestion des conditions aux limites (physiques mais aussi conditions de bord entre patches de même niveau voire de niveaux distincts). Pour favoriser cette résolution, la notion de maillages **properly nested** a été introduite par Quirk [74]. Celle-ci impose à l'algorithme de regroupement des cellules marquées les contraintes suivantes :

FIG. 4.20 – Exemple de hiérarchie de maillages *Properly Nested*

➤ les patchworks sont inclus par ordre croissant de taux de raffinement :

$$G_{l,n} \subset G_{l-1,n} \subset \dots \subset G_0;$$

➤ les patches d'un même niveau ne se recouvrent pas : $G_{l,n}^i \cap G_{l,n}^j = \emptyset$ quels que soient i et j dans $\{1, \dots, K_{l,n}\}$;

➤ deux cellules voisines appartiennent soit au même patchwork, soit à des patchworks de niveaux consécutifs.

Le dernier point peut se reformuler comme suit : le patchwork $G_{l,n}$ est nécessairement séparé de $G_{l-2,n} \setminus G_{l-1,n}$ par des cellules de $G_{l-1,n}$ (cf. FIG. 4.20). Ce type d'algorithme a été utilisé par exemple par Jouhaud [51] ou encore Ryan et Borrel [78].

4.4.3 Adaptation à la résolution de l'équation de transport

Intéressons-nous maintenant à la résolution de l'équation de transport grâce à cette stratégie AMR. L'une des principales difficultés est la communication entre les différents niveaux de raffinement, en particulier pour le calcul des données (projection d'une grille sur l'autre) et le traitement des conditions aux limites.

On se restreint à un niveau de raffinement dans un souci de clarté, mais l'extension à plusieurs niveaux est réalisable. On se place au temps n . On décrit sur la figure 4.21 les différentes étapes du processus :

- Les étapes **1** et **1'** correspondent à la résolution simultanée de l'équation de transport sur les maillages fin et grossier. S_0 et $S_{1,n}$ désignent le solveur (ici le schéma DL) appliqué sur chacun des deux maillages. Le champ de vitesse utilisé est le champ au temps n . On obtient donc deux vecteurs de valeurs dites fines (par $S_{1,n}$) et grossières (par S_0).
- L'étape **2** consiste à transmettre les valeurs du maillage fin au maillage grossier *via* l'opérateur de restriction $R_0^{1,n}$: on conserve uniquement les valeurs fines aux nœuds qui sont communs aux deux maillages (pour le cas des maillages dont les nœuds sont situés aux sommets du maillage¹⁵).

¹⁵ Lorsque les nœuds sont au centre des mailles, on procède, sur une maille grossière donnée, par interpolation des valeurs dans les cellules fines recouvrant la cellule grossière.

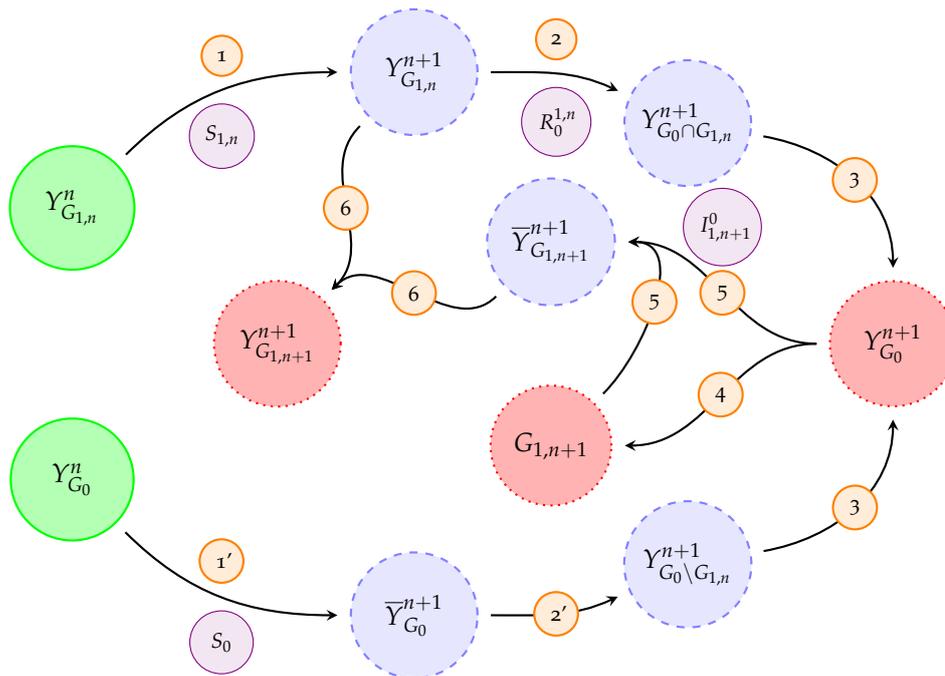
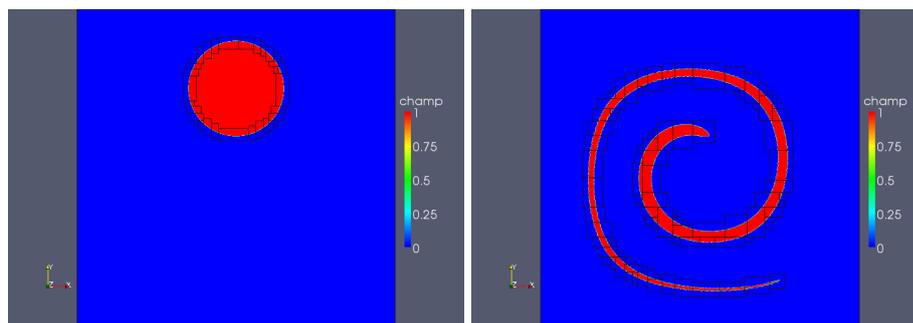


FIG. 4.21 – Schéma résumant le passage du temps n au temps $n + 1$. Les bulles vertes (en trait plein), bleues (en trait discontinu) et rouges (en pointillés) désignent respectivement les données au temps n , les valeurs intermédiaires et les valeurs finales au temps $n + 1$. En orange, les étapes successives et en violet, les opérateurs associés.

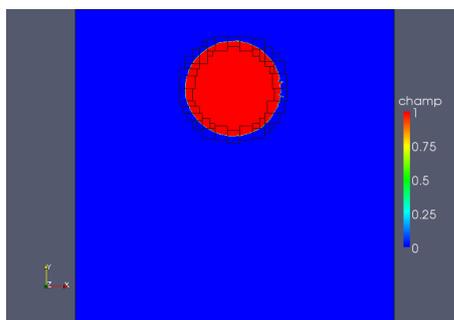
- En parallèle, on réalise l'étape 2' en conservant les valeurs grossières issues des cellules n'intersectant pas $G_{1,n}$.
- Dans l'étape 3, on regroupe dans un seul vecteur les valeurs collectées au cours des étapes 2 et 2', qui est la solution grossière au temps $n + 1$.
- L'étape 4 est consacrée à la construction, à partir de la nouvelle solution grossière, du nouveau maillage fin par l'algorithme AMR décrit dans le paragraphe précédent (marquage des cellules puis regroupement par la méthode Grouping-Clustering).
- Pour construire la nouvelle solution fine (étape 5), on projette (via l'opérateur d'interpolation $I_{1,n+1}^0$) la nouvelle solution grossière aux nœuds du nouveau maillage fin. Le résultat n'est toutefois pas la solution au temps $n + 1$ définitive. En effet, lorsque des cellules sont communes à l'ancien et au nouveau maillages fins, on reprend dans ces cellules les valeurs correspondantes dans le vecteur $Y_{G_{1,n}}^{n+1}$ (étape 6). Cette procédure sert à éviter une perte de précision due aux deux projections « fin \rightarrow grossier » (2) puis « grossier \rightarrow fin » (5).

Dans la mesure où l'on transporte une fonction égale à 1 ou à 0, la solution fine obtenue est identique à celle que fournirait un raffinement global (de taux égal à celui du niveau fin). En cas de plusieurs niveaux de raffinement, ce schéma, pour les niveaux supérieurs, est intégré récursivement avant l'étape 2.

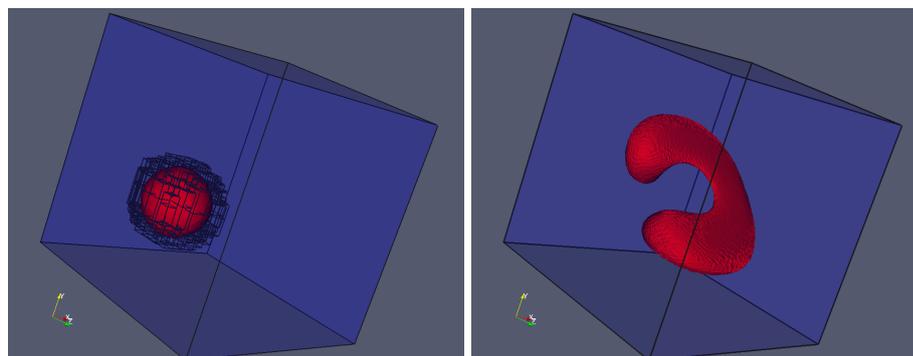


(a) Bulle initiale (disque)

(b) Bulle transportée (disque) à un temps intermédiaire

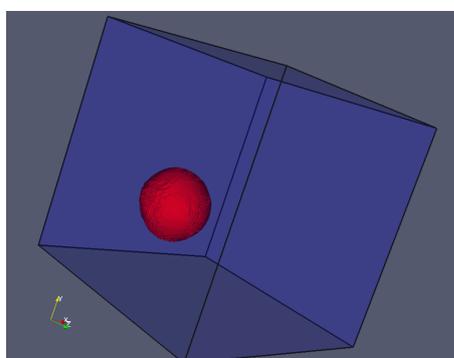


(c) Bulle finale (disque)



(d) Bulle initiale (sphère)

(e) Bulle transportée (sphère) à un temps intermédiaire



(f) Bulle finale (sphère)

FIG. 4.22 – Apport de l'AMR par rapport aux cas traités sur les figures 4.19

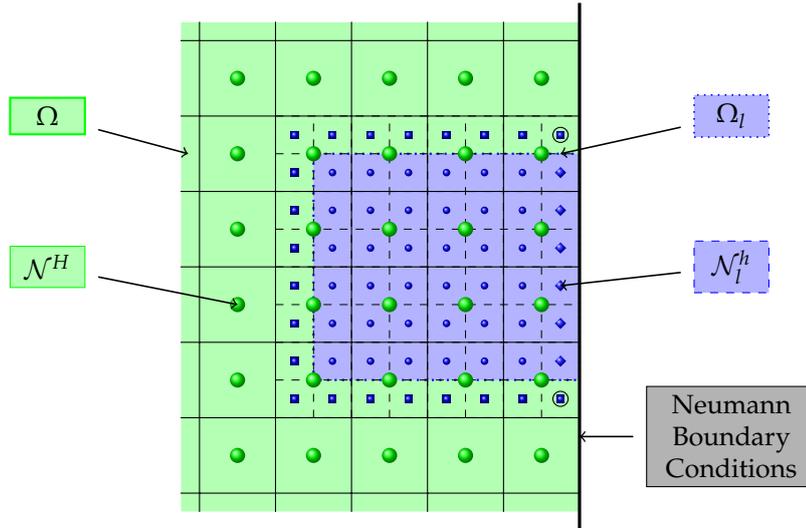


FIG. 4.23 – Exemple de grilles illustrant la méthode LDC avec un raffinement de 2. Les nœuds du maillage grossier sont représentés par les cercles verts (plus grands) tandis que ceux du maillage fin sont bleus (petits cercles, carrés, diamants). Les carrés sont des nœuds auxquels on applique une condition de Dirichlet, les diamants une condition de Neumann. Quant aux nœuds entourés, la condition aux limites est laissée au choix de l'utilisateur.

On présente sur les figures 4.22 les résultats obtenus par A. Mekkas grâce à cet algorithme sur le cas-test de cercle/sphère dans un champ rotationnel périodique. Cette technique a permis de conserver l'unité de la matière au cours du temps et de recouvrer la donnée initiale au terme d'une période.

4.4.4 Simulations du modèle ABV

On a présenté dans le paragraphe précédent un algorithme permettant de traiter avec précision la discontinuité des solutions d'une équation de transport, le solveur étant le schéma de Després et Lagoutière. Il reste à traiter la seconde équation du modèle, à savoir l'équation de Poisson sur le potentiel de vitesse. Le second membre étant discontinu, on utilise là aussi plusieurs niveaux de maillage pour assurer la qualité de la résolution. La méthode choisie est la méthode LDC (Local Defect Correction), introduite par Hackbush [46] puis améliorée par Anthonissen [2].

Donnons quelques détails sur la procédure. On suppose que l'on résout dans un domaine Ω une équation de Poisson avec condition de Neumann :

$$\begin{cases} \Delta\phi = f, \\ \nabla\phi \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

avec un second membre de moyenne nulle, par compatibilité avec la condition aux limites. On suppose de plus que le second membre varie fortement dans un sous-domaine Ω_l . Si le problème de Poisson est bien posé dans Ω , il ne l'est pas dans Ω_l , ce qui impose d'ajouter une condition aux limites sur le bord de Ω_l qui n'intersecte pas $\partial\Omega$.¹⁶ Cette condition est précisée dans la suite.

¹⁶ En cas d'intersection non vide, on conserve la condition de Neumann sur la partie correspondante.

4.5. Un algorithme pour les équations de Navier-Stokes incompressible : le schéma MAC

On discrétise chacun des deux domaines par un maillage cartésien homogène (de pas H pour Ω et de pas $h = H/r_l$, $r_l \in \mathbb{N}^*$, pour Ω_l). Les ensembles de nœuds sont respectivement notés Ω^H et Ω_l^h (cf. FIG. 4.23). La méthode LDC est une méthode itérative où on résout alternativement l'équation de Poisson sur les deux maillages, avec une mise à jour des données. Plus précisément, on résout l'équation de Poisson sur le maillage grossier par le solveur Δ^H de son choix (gradient conjugué corrigé pour la condition de Neumann par exemple), obtenant ainsi une solution ϕ_0^H . On résout ensuite le problème sur le maillage fin en imposant la condition de Dirichlet $\phi_0^h = \phi_0^H$ sur la frontière non contenue dans $\partial\Omega$. Étant donnée ϕ_0^h , on résout de nouveau le problème grossier mais en ajoutant au second membre le résidu de la solution fine projetée sur la grille grossière :

$$r_{0,i}^H = (\Delta^H \phi_0^h)_i - f_i.$$

Cela fournit une nouvelle solution grossière ϕ_1^H , qui permet de mettre à jour la condition aux limites du problème fin, et ainsi de suite. La convergence est généralement très rapide.

Fort de ces deux outils numériques, on peut maintenant traiter le modèle ABV. La première équation étant instationnaire, au contraire de la seconde, on effectue alternativement une étape en temps par l'algorithme AMR pour l'équation d'advection, avec le champ de vitesse au temps précédent, puis une étape de calcul du champ de vitesse grâce à la méthode LDC, déterminant ainsi le champ de vitesse au temps suivant. On donne ici un résultat pour le cas $\Omega = [-1, 1]^2$ et avec $\psi(t) = 1$. La combinaison de ces différents algorithmes (FIGS. 4.24a-4.24c) permet d'éviter les phénomènes de coalescence numérique observés sans AMR (FIG. 4.24d).

4.5 UN ALGORITHME POUR LES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES INCOMPRESSIBLE : LE SCHÉMA MAC

Nous avons proposé dans les parties précédentes des méthodes numériques pour simuler le modèle ABV. Pour traiter le modèle DLMN, il est nécessaire d'ajouter un solveur pour l'équation d'advection-diffusion sur la température, puis de coupler le tout avec un solveur de type Navier-Stokes incompressible pour la partie solénoïdale de la vitesse. C'est pourquoi on donne ici quelques précisions sur un des premiers schémas traitant la simulation des équations de Navier-Stokes pour un écoulement diphasique incompressible (cf. Harlow et Welsh [47]).

Les caractéristiques principales de ce schéma sont au nombre de deux. La première concerne le traitement de l'interface (ou plus généralement de surfaces libres) à l'aide de marqueurs, qui ont donné son nom à la méthode (MAC pour *Markers and Cell*), posant ainsi les bases des techniques de *Front Tracking*. La seconde est liée à la localisation des inconnues sur une grille décalée, comme nous le verrons plus bas. C'est à ce second critère que font référence les schémas MAC actuels (et plus nécessairement au suivi de marqueurs).

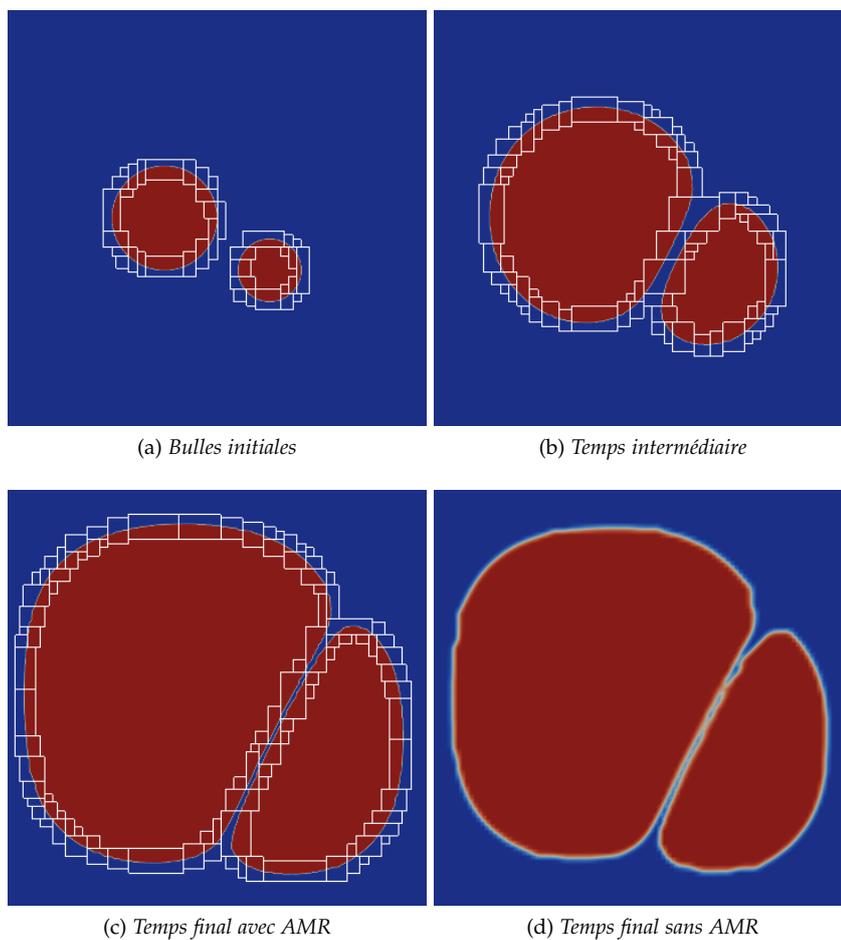


FIG. 4.24 – Simulations du modèle ABV par l'algorithme DL-AMR-LDC

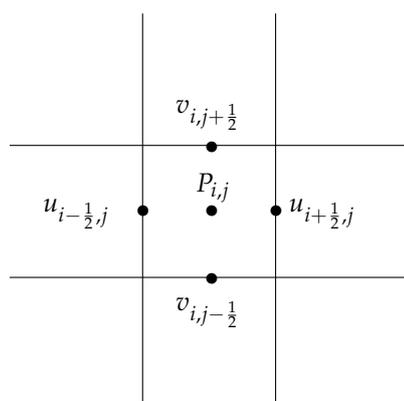


FIG. 4.25 – Inconnues pour le schéma MAC

4.5. Un algorithme pour les équations de Navier-Stokes incompressible : le schéma MAC

Les équations se présentent sous la forme :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, & (4.28a) \\ \partial_t \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \nu \Delta \mathbf{u} = \mathbf{g} - \nabla P. & (4.28b) \end{cases}$$

On se donne un maillage cartésien uniforme dans \mathbb{R}^2 dont les cellules sont centrées en (x_i, y_j) . Le champ $\mathbf{u} = (u, v)$ est donné dans chaque cellule selon la figure 4.25 : les composantes du champ de vitesse sont données sur les faces et la pression au centre des cellules.

On applique alors le schéma numérique suivant :

$$\begin{aligned} \frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - u_{i+\frac{1}{2},j}^n}{\Delta t} = & -\frac{(u_{i+1,j}^n)^2 - (u_{i,j}^n)^2}{\Delta x} - \frac{u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n - u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n v_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta y} - \frac{P_{i+1,j}^n - P_{i,j}^n}{\Delta x} \\ & + \nu \left(\frac{u_{i+\frac{3}{2},j}^n - 2u_{i+\frac{1}{2},j}^n + u_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1}^n - 2u_{i+\frac{1}{2},j}^n + u_{i+\frac{1}{2},j-1}^n}{\Delta y^2} \right) + g_x, \end{aligned} \quad (4.29a)$$

$$\begin{aligned} \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - v_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} = & -\frac{(v_{i,j+1}^n)^2 - (v_{i,j}^n)^2}{\Delta y} - \frac{u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n - u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n v_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} - \frac{P_{i,j+1}^n - P_{i,j}^n}{\Delta y} \\ & + \nu \left(\frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}}^n - 2v_{i,j+\frac{1}{2}}^n + v_{i-1,j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta x^2} + \frac{v_{i,j+\frac{3}{2}}^n - 2v_{i,j+\frac{1}{2}}^n + v_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta y^2} \right) + g_y. \end{aligned} \quad (4.29b)$$

Lorsqu'il est nécessaire d'évaluer les inconnues en des points autres que ceux de la figure 4.25, on utilise des moyennes telles que :

$$\begin{aligned} *_{i,j} &= \frac{*_{i+\frac{1}{2},j} + *_{i-\frac{1}{2},j}}{2}, \\ *_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} &= \frac{*_{i+\frac{1}{2},j+1} + *_{i+\frac{1}{2},j}}{2}. \end{aligned}$$

Pour calculer le champ de pression, on utilise les propriétés des équations. On introduit l'opérateur « divergence » discret :

$$D_{i,j} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta y}.$$

Des équations (4.29a-4.29b), on obtient la nouvelle équation :

$$\begin{aligned} \frac{D_{i,j}^{n+1} - D_{i,j}^n}{\Delta t} = & -Q_{i,j}^n - \frac{P_{i+1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} - \frac{P_{i,j+1}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \\ & + \nu \left(\frac{D_{i+1,j}^n - 2D_{i,j}^n + D_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{D_{i,j+1}^n - 2D_{i,j}^n + D_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right), \end{aligned} \quad (4.30)$$

où on a noté :

$$Q_{i,j}^n = \frac{(u_{i+1,j}^n)^2 - 2(u_{i,j}^n)^2 + (u_{i-1,j}^n)^2}{\Delta x^2} + \frac{(v_{i,j+1}^n)^2 - 2(v_{i,j}^n)^2 + (v_{i,j-1}^n)^2}{\Delta y^2} + 2 \frac{u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n + u_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n v_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n - u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n v_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n - u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n v_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta x \Delta y}.$$

L'équation (4.30) correspond à la discrétisation de l'équation continue que l'on obtient en prenant la divergence de l'équation (4.28b), à savoir :

$$\partial_t \mathcal{D} - \nu \Delta \mathcal{D} = -\Delta P - \mathcal{Q} \quad \text{avec } \mathcal{D} = \nabla \cdot \mathbf{u} \text{ et } \mathcal{Q} = \nabla \cdot [\nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})].$$

En supposant que $D_{i,j}^{n+1} = 0$ quels que soient i et j , qui est l'analogue discret de (4.28a), l'égalité (4.30) fournit le schéma pour la pression P :

$$\frac{P_{i+1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{P_{i,j+1}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} = -R_{i,j}^n, \quad (4.31)$$

où R est défini par :

$$R_{i,j}^n = Q_{i,j}^n - \frac{D_{i,j}^n}{\Delta t} - \nu \left(\frac{D_{i+1,j}^n - 2D_{i,j}^n + D_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{D_{i,j+1}^n - 2D_{i,j}^n + D_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right). \quad (4.32)$$

En pratique, on peut utiliser indifféremment R et Q car les deux sont égaux à des multiples de D près, censés être nuls d'après l'équation (4.28b).¹⁷ L'algorithme général consiste donc, connaissant le champ de vitesse au temps n , à calculer R par la formule (4.32), puis à déterminer le champ de pression P au temps n en tant que solution de (4.31), et enfin à évaluer le champ de vitesse au temps $n+1$ grâce aux équations (4.29a-4.29b).

4.6 BILAN

La Simulation Numérique Directe des écoulements de bulles représente une thématique *a priori* difficile à mettre en œuvre, mais particulièrement stimulante, d'où l'intérêt de nombreux chercheurs. On a présenté dans ce chapitre les enjeux et les problèmes associés à ce défi scientifique, en particulier au sujet du traitement numérique des interfaces.

Dans l'optique de simuler le modèle ABV, on s'est intéressé à plusieurs schémas numériques de résolution de l'équation de transport en fonction de la régularité des données initiales (et donc des solutions). Pour les cas réguliers, on a proposé un nouveau schéma de type MOC. Ce schéma permet, en dimension 1, de préserver le principe du maximum (fondamental compte-tenu des contraintes physiques portant sur les variables simulées) tout en assurant un ordre 2 en espace et en temps. De plus, ce schéma est inconditionnellement stable et consistant, ce qui offre une grande liberté de choix pour discrétiser le problème.

¹⁷ En pratique, il est cependant recommandé d'utiliser R .

Pour les cas irréguliers, on a étudié le couplage entre le schéma anti-diffusif de *Després* et *Lagoutière*, un algorithme de raffinement adaptatif de maillages pour l'équation de transport, et une méthode de résolution de l'équation de Poisson avec second membre discontinu. Les résultats obtenus sont particulièrement encourageants quant à l'apport des méthodes pré-citées par rapport à des simulations grossières, tant du point de vue de la précision que de l'efficacité des algorithmes.

Ce constat permet d'envisager d'appliquer ces méthodes à la simulation du système DLMN-p puis du système DLMN.

Troisième partie

**Diphasic Low Mach Number
system**

ÉTUDE DU SYSTÈME DLMN DANS LE CAS RÉGULIER

5

SOMMAIRE

5.1	SYSTÈME DIFFÉRENTIEL	180
5.2	DOMAINE D'EXISTENCE	181
5.3	PREUVE DU THÉORÈME D'EXISTENCE	185
5.3.1	Système itératif	185
5.3.2	Bornitude	187
5.3.3	Convergence	197
5.3.4	Énoncé du théorème	203
5.3.5	Viscosité non constante	205
5.4	COMMENTAIRES	206

CE CHAPITRE est consacré à la preuve de l'existence et de l'unicité d'une solution classique au système DLMN (1.11). On se restreint en premier lieu au cas où la viscosité est constante, ce qui permet de diminuer le nombre de termes non-linéaires. On adapte ensuite la preuve au cas des viscosités non constantes. Cependant, dans les deux cas, on se limite au cas des conditions aux limites périodiques (ce qui revient à se placer dans le domaine $\Omega = \mathbb{T}^d$) afin de ne pas faire apparaître de termes de bord dans les intégrations par parties.

On s'inspire des travaux de *Embid* sur la combustion lente et des techniques utilisées dans le chapitre 3, en employant constamment les outils rappelés ou énoncés dans le chapitre 2. On applique successivement les résultats théoriques aux différentes équations du système, à savoir à l'équation d'advection (pour la variable Y), à l'équation d'advection-diffusion (pour T et P), à l'équation de Poisson (pour $\nabla\phi$) et enfin au système de type Navier-Stokes incompressible linéarisé (pour w et $\nabla\pi$). Le schéma de la preuve est classique, basée sur la construction d'une suite de type **itérées de Picard**, bornée dans l'espace $\mathcal{X}_{s,\mathcal{F}}(\mathbb{T}^d)$ et convergente dans l'espace plus grand $\mathcal{X}_{0,\mathcal{F}}(\mathbb{T}^d)$. Les deux difficultés principales associées à ce problème sont le traitement du **temps d'existence** et surtout des **non-linéarités**. Contrairement au modèle ABV, le système DLMN est non-linéaire par ses coefficients (en plus des termes de produit), qui sont fonctions des inconnues principales. Il est donc nécessaire dans un premier temps de définir le type de non-linéarité (cf. §5.2) afin de pouvoir appliquer les inégalités de composition (cf. **lemme 2.6**).

Il faut ensuite veiller à respecter non seulement les contraintes mathématiques (de régularité), mais aussi les hypothèses physiques (positivité des variables thermodynamiques, appartenance à l'intervalle $[0, 1]$ de la fraction massique, ...). La preuve repose largement sur l'utilisation des estimations d'énergie associées aux différentes équations, avec un souci constant d'évaluer la régularité des termes de produit, pour pouvoir appliquer les inégalités fonctionnelles les plus précises, d'autant plus que les trois variables principales (Y , T et P) n'ont pas la même régularité. Le résultat final est donc un théorème d'existence et d'unicité en temps fini. On explicite en particulier les contraintes qui s'appliquent au temps d'existence et qui découlent de la méthode de Picard. Comme pour le modèle ABV, ces contraintes sont des conditions suffisantes permettant la construction d'une solution.

5.1 SYSTÈME DIFFÉRENTIEL

On a introduit, dans le chapitre 1, le système (1.11) qui modélise l'évolution d'un écoulement diphasique compressible sous l'hypothèse d'un nombre de Mach très faible. On rappelle sa formulation, dans le cas où $\Omega = \mathbb{T}^d$ et où la viscosité est égale à une constante, notée $\mu_1 > 0$:

$$\partial_t Y + \mathbf{u} \cdot \nabla Y = 0, \quad (5.1a)$$

$$\rho c_p [\partial_t T + \mathbf{u} \cdot \nabla T] = \alpha T P'(t) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T), \quad (5.1b)$$

$$P'(t) = \mathcal{H}_\theta(t), \quad (5.1c)$$

$$\Delta \phi = \mathcal{G}_\theta, \quad (5.1d)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \quad (5.1e)$$

$$\rho [\partial_t \mathbf{w} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w}] - \mu_1 \Delta \mathbf{w} = -\nabla \pi + \rho \mathbf{g} - \rho [\partial_t \nabla \phi + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla \phi], \quad (5.1f)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} + \nabla \phi. \quad (5.1g)$$

On rappelle la notation $\boldsymbol{\theta} = (Y, T, P)$, qui est le triplet de variables principales du système. L'application ρ (il en est de même pour κ , c_p et α) est une fonction de $\boldsymbol{\theta}$ (cf. §5.2). Les seconds membres de l'équation différentielle sur P et de l'équation de Poisson sur ϕ sont donnés par :

$$\mathcal{H}_\theta(t) = \frac{\int_{\mathbb{T}^d} \beta(\boldsymbol{\theta}) \nabla \cdot [\kappa(\boldsymbol{\theta}) \nabla T] \, dx}{\int_{\mathbb{T}^d} \frac{1}{\Gamma(\boldsymbol{\theta})} \, dx}$$

et :

$$\mathcal{G}_\theta(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{\Gamma(\boldsymbol{\theta})} \frac{\mathcal{H}_\theta(t)}{P(t)} + \frac{\beta(\boldsymbol{\theta}) \nabla \cdot [\kappa(\boldsymbol{\theta}) \nabla T]}{P(t)}.$$

Les variables β et Γ sont également considérées comme des fonctions de $\boldsymbol{\theta}$.

Les équations (5.1) forment ainsi un système non-linéaire de 6 EDPs à 6 variables (Y , T , P , w , $\nabla\phi$ et $\nabla\pi$), que l'on complète par des conditions aux limites (on ne donnera pas de détails ici à ce sujet puisque l'on se place dans le cas des CL périodiques) et des conditions initiales :

$$Y(0, \mathbf{x}) = Y_0(\mathbf{x}), \quad (5.2a)$$

$$T(0, \mathbf{x}) = T_0(\mathbf{x}), \quad (5.2b)$$

$$P(0) = p_0, \quad (5.2c)$$

$$\mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad (5.2d)$$

$$\text{avec } \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_0(\mathbf{x}) + \nabla\phi_0(\mathbf{x}), \text{ où } \nabla \cdot \mathbf{w}_0 = 0 \text{ et } \Delta\phi_0 = \mathcal{G}_{\theta_0}. \quad (5.2e)$$

Comme évoqué ci-dessus, on souhaite, par le biais de ce système, modéliser l'évolution de bulles, *i.e.* d'inclusions de phases gazeuses dans une phase liquide, ce que l'on peut assimiler à un écoulement de deux fluides non miscibles. On impose une condition initiale discontinue pour Y , à savoir la fonction caractéristique du domaine $\Omega_1(0) \subset \Omega$ occupé initialement par le fluide 1 :

$$Y_0(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_1(0), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'autres variables peuvent être *de facto* également discontinues à l'interface, puisque les variables non principales dépendent de Y .

Cependant, on choisit de s'intéresser dans un premier temps, de manière analogue au modèle ABV (*cf.* § 3.1.3), à des données initiales régulières, dans la double perspective de déterminer des caractéristiques globales que possèdent les éventuelles solutions et de construire des solutions faibles par un processus de régularisation. Comme précédemment (*cf.* § 3.2.3), on peut par exemple prendre une régularisation de la fonction Y_0 ci-dessus avec une faible zone de transition de taille ε (on considérera alors l'influence de ε sur le temps d'existence, pour éventuellement faire tendre ε vers 0), ce qui revient à supposer les fluides (faiblement) miscibles. On conserve toutefois l'hypothèse Y_0 à valeurs dans $[0, 1]$.

5.2 DOMAINE D'EXISTENCE

Le but de ce paragraphe est de donner des précisions sur les différents coefficients apparaissant dans le modèle. Les restrictions prescrites par les hypothèses ci-dessous reposent sur des critères mathématiques, lesquels sont généralement vérifiés pour les lois d'état et de comportement classiques. Ceci ne diminue donc pas la portée physique de ce système.

Les coefficients du système sont fonctions de $\boldsymbol{\theta} = (Y, T, P)$. Les contraintes mathématiques qui s'appliquent à ce vecteur se déduisent des contraintes physiques sous-jacentes, ce qui amène à introduire l'ensemble :

$$\Theta = \{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^3 : \theta_1 \in [0, 1], \theta_2 > 0, \theta_3 > 0\}.$$

Contrairement au cas de combustion traité par *Embed*, les comportements des trois variables sont différents : Y est ici solution d'une équation d'advection simple,¹ tandis que T et P vérifient des équations d'advection-diffusion.² On note alors $\underline{\theta} = (T, P)$ la restriction de θ à \mathbb{R}^2 et $\underline{\Theta} = (\mathbb{R}_+^*)^2$, de sorte que $\Theta = [0, 1] \times \underline{\Theta}$.

Considérons l'ensemble des coefficients auxquels s'applique ce paragraphe, que l'on note :

$$\Xi = \{\rho, \kappa, \alpha, c_p, \mu, \beta, \Gamma\}.$$

On souhaite définir la dépendance de chacune de ces fonctions par rapport à la variable $\theta = (Y, \underline{\theta})$. Commençons par évoquer les lois propres à chaque fluide. On suppose en effet que les fonctions ζ de Ξ sont définies dans chaque fluide par une loi d'état ou de comportement que l'on note $\zeta_i = \zeta_i(\theta)$. Pour générer la variable globale dans l'ensemble du domaine (ici \mathbb{T}^d), on souhaite utiliser des relations du type $\zeta(\theta) = \ell_\zeta(Y, \zeta_1(\theta), \zeta_2(\theta))$. Cependant, les fonctions ℓ_ζ doivent satisfaire certaines propriétés, regroupées dans la définition de \mathcal{L} .

Définition 5.1

On définit \mathcal{L} comme l'ensemble des fonctions $\ell \in \mathcal{C}^\infty([0, 1] \times \mathbb{R}^2)$ telles que :

- ❶ $\forall (y, x_1, x_2) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^2, \ell(y, x_1, x_2) = \ell(1 - y, x_2, x_1);$
- ❷ $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \ell(1, x_1, x_2) = x_1;$
- ❸ $\forall (y, x_1) \in [0, 1] \times \mathbb{R}, \ell(y, x_1, x_1) = x_1.$
- ❹ $\forall (y, x_1, x_2) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^2, x_1 x_2 \neq 0 \implies \ell(y, x_1, x_2) \neq 0;$
- ❺ $\forall (y, x_1, x_2) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^2, x_1 x_2 > 0 \implies x_1 \ell(y, x_1, x_2) > 0;$

L'hypothèse de régularité \mathcal{C}^∞ est forte et peut être remplacée par une appartenance à \mathcal{H}^{s+1} , où s est la régularité de θ_0 .

Expliquons ensuite la signification de chacune de ces contraintes. Le point ❶ est un principe de symétrie entre les indices de deux fluides : si l'on échange les indices des deux fluides, on doit retrouver les mêmes résultats en changeant Y en $1 - Y$. Quant au point ❷, il assure que lorsque $Y = 1$, on est situé dans le fluide 1 et on obtient les propriétés propres à ce fluide, *i.e.* $\zeta_1(\theta)$. On note d'ailleurs que les conditions ❶ et ❷ impliquent que, quels que soient $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \ell(0, x_1, x_2) = x_2$ (si $Y = 0$, on est dans le fluide 2). Ensuite, lorsque les deux fluides ont les mêmes propriétés ($\zeta_1 = \zeta_2$), le fluide global doit également avoir les mêmes propriétés, ce qui est garanti par le point ❸. Enfin, les conditions ❹ et ❺ assurent que la variable globale conserve les propriétés de nullité et de signe des variables particulières. Ces deux dernières conditions ne sont pas utiles pour tous les éléments de Ξ , mais pour ne pas alourdir les notations, on adopte les mêmes hypothèses pour toutes les variables. À titre d'exemples, on peut citer :

- la moyenne arithmétique : $\ell(y, x_1, x_2) = yx_1 + (1 - y)x_2;$
- la moyenne géométrique : $\ell(y, x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{yx_2 + (1 - y)x_1}.$

¹ Dans le modèle de combustion, Y est solution d'une équation d'advection-diffusion.

² P est en réalité solution d'une EDO en temps, mais on se ramène à une équation d'advection-diffusion *via* le lemme 2.14.

On peut donc identifier notre première hypothèse :

Hypothèse 2

Chaque fonction ξ de Ξ est définie par la relation :

$$\xi(\boldsymbol{\theta}) = \ell(Y, \xi_1(\boldsymbol{\theta}), \xi_2(\boldsymbol{\theta}))$$

pour une certaine fonction $\ell \in \mathcal{L}$.

On choisit la même fonction ℓ pour toutes les variables dans un souci de clarté, mais on pourrait sans difficulté additionnelle utiliser des fonctions différentes ℓ_ξ . Il faut cependant avoir à l'esprit que ces relations ne sont **jamais** utilisées en tant que telles. Elles servent uniquement à fournir des informations sur la régularité et le signe des variables thermodynamiques.

Dans ce qui précède, les variables de Ξ ont été considérées comme des fonctions mathématiques, indépendantes les unes des autres. On a cependant vu au cours du chapitre 1 qu'il fallait distinguer les variables « primitives », données par les lois d'état et de comportement, à savoir ρ , ε (ou h), κ et μ , et les variables secondaires, déduites des premières par des relations thermodynamiques, comme $\alpha = -\rho^{-1}\partial_T\rho$, c_p , β et Γ . On pourrait donc n'appliquer l'hypothèse 2 qu'à l'ensemble $\Xi = \{\rho, \varepsilon, \kappa, \mu\}$ et utiliser les relations thermodynamiques pour exprimer les autres variables. Cependant, dans une première approche, et pour éviter des difficultés liées au signe de certaines quantités, on omet pour l'instant le fait que les variables sont liées.

Les contraintes définissant l'ensemble \mathcal{L} proviennent des hypothèses de validité des lemmes d'advection et d'advection-diffusion, que l'on souhaite voir vérifiées par les composantes du système itératif. En particulier, certaines quantités apparaissent au dénominateur et doivent donc être non nulles. De même, pour pouvoir utiliser le résultat mentionné précédemment pour les équations d'advection-diffusion, il est nécessaire que les coefficients de diffusion soient bornés par des constantes strictement positives. Eu égard à ces considérations, on émet l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3

Les fonctions ρ_i , $c_{p,i}$ et Γ_i ($i \in \{1, 2\}$) sont non nulles sur un domaine ouvert non vide $G_1 \subseteq \Theta$. De plus, $\frac{\kappa_i}{\rho_i c_{p,i}}$ et $\frac{\mu_i}{\rho_i}$ sont strictement positives sur G_1 .

Ainsi, pour $\boldsymbol{\theta}_0 \in G_1$, on a bien $\rho(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0, \dots$, compte-tenu de l'hypothèse 3 et des points ③ et ④ de la définition 5.1. On ajoute donc l'hypothèse :

Hypothèse 4

Le couple $\boldsymbol{\theta}_0 = (T_0, p_0)$ est défini sur \mathbb{T}^d à valeurs dans un ouvert borné convexe $G \subset \mathbb{R}^2$ tel que $\overline{G} \subset G_1$.

En particulier, comme G est ouvert, il existe $\delta_G > 0$ tel que, si $\boldsymbol{\theta} : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}^2$ et si $|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0|_\infty < \delta_G$, alors $\boldsymbol{\theta}(\mathbb{T}^d) \subset G$. Un point-clé de la démonstration consistera donc à prouver que pour t suffisamment petit, $\boldsymbol{\theta}$ reste à valeurs dans G .

On pose ensuite $G_0 = [0,1] \times G$, de sorte que $\overline{G_0}$ est un borné convexe de \mathbb{R}^3 inclus dans Θ . Ainsi, si $\zeta \in \Xi$ vérifie l'hypothèse 2 et si $\theta : \mathbb{T}^d \rightarrow G_0$, alors la fonction $x \mapsto \zeta(\theta(x))$ est bornée, au sens où **il existe une constante $\check{\zeta} \in]0,1[$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{T}^d$, $\check{\zeta} \leq \zeta(\theta(x)) \leq \check{\zeta}^{-1}$.**

Terminons par un exemple illustrant ces notions. Les lois d'état sont généralement données sous la forme $P(\rho, S)$, voire $P(\rho, T)$ sous l'hypothèse 1. Ici, on considère P comme une variable principale et non plus ρ , ce qui est une conséquence de la réécriture de la loi de conservation de la masse. Le système DLMN ne fait plus apparaître ρ comme une variable conservée au cours du temps mais comme un coefficient.

Considérons par exemple un gaz de van der Waals sous l'hypothèse de non co-existence des deux phases. La loi d'état est alors donnée par :

$$P_1 = \frac{\rho_1 RT_1}{1 - \rho_1 b'}$$

R désignant la constante des gaz parfaits et b le covolume ($b = 0$ pour les gaz parfaits).

Cette relation peut encore s'écrire :

$$\rho_1 = \frac{P_1}{RT_1 + bP_1} < \frac{1}{b'}$$

ce qui fournit une expression de ρ_1 en fonction de T_1 et P_1 . La fonction ρ_1 ainsi définie vérifie l'hypothèse 3 sur Θ . En revanche, si l'on prend en compte les forces intermoléculaires, la loi prend la forme :

$$P_1 = \frac{\rho_1 RT_1}{1 - \rho_1 b} - a\rho_1^2,$$

avec $a > 0$ [77]. ρ_1 vérifie alors l'équation polynomiale :

$$\rho_1^3 - \frac{\rho_1^2}{b} + \frac{RT_1 + P_1 b}{ab} \rho_1 - \frac{P_1}{ab} = 0.$$

Pour T_1 et P_1 vérifiant $a < b(RT_1 + P_1 b)$, ceci définit ρ_1 de manière univoque (et strictement positive), ce qui permet de construire l'ouvert G_1 dans l'hypothèse 3.

En conclusion, on a introduit ici la notion de dépendance vis-à-vis de θ dans un sens mathématique. Cette notion est fondamentale dans la mesure où les coefficients concernés engendrent des non-linéarités dans le système, et sont soumis à des contraintes de signe (et de non-nullité). Dans une première approche (formelle), on omet les relations thermodynamiques pour nous concentrer sur l'influence de ces coefficients. Les contraintes émises permettent cependant **la prise en compte de lois d'état très générales**, contrairement au cas de combustion lente traité par *Embid* où seuls des gaz parfaits étaient considérés.

5.3 PREUVE DU THÉORÈME D'EXISTENCE

5.3.1 Système itératif

Tenant compte de lois d'état complètes (ou de comportement) pour déterminer les éléments de Ξ , le système DLMN est clos. On va s'attacher dans les prochains paragraphes à en construire une solution. Pour cela, on introduit quelques notations supplémentaires afin d'alléger les écritures :

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{\alpha(\boldsymbol{\theta})}{\rho(\boldsymbol{\theta})c_p(\boldsymbol{\theta})}, & \tilde{\beta}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{\beta(\boldsymbol{\theta})T}{P} = \tilde{\alpha}(\boldsymbol{\theta})T, & \tilde{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{\Gamma(\boldsymbol{\theta})P}, \\ \tilde{\mu}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{\mu_1}{\rho(\boldsymbol{\theta})}, & \tilde{\kappa}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{\kappa(\boldsymbol{\theta})}{\rho(\boldsymbol{\theta})c_p(\boldsymbol{\theta})}.\end{aligned}$$

On cherche à construire une solution du système (5.1) par le système itératif suivant :

- ❶ Initialisation :

$$Y^{k=0}(t, \mathbf{x}) = Y_0(\mathbf{x}), \quad \underline{\boldsymbol{\theta}}^{k=0}(t, \mathbf{x}) = \underline{\boldsymbol{\theta}}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u}^{k=0}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}). \quad (5.3a)$$

On initialise le processus à l'aide des conditions initiales en temps afin de ne pas ajouter de paramètres supplémentaires. La régularité des données initiales suffit pour appliquer les lemmes d'existence. De plus, l'intervalle d'existence en temps de ces termes à l'itération 0 est infini.

- ❷ Calcul de $\boldsymbol{\theta}^{k+1}$:

$$\begin{cases} \partial_t Y^{k+1} + \mathbf{u}^k \cdot \nabla Y^{k+1} = 0, \\ Y^{k+1}(0, \mathbf{x}) = Y_0(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (5.3b)$$

$$\begin{cases} \partial_t T^{k+1} + \mathbf{u}^k \cdot \nabla T^{k+1} - \tilde{\kappa}(\boldsymbol{\theta}^k) \Delta T^{k+1} = \tilde{\beta}(\boldsymbol{\theta}^k) \mathcal{H}_{\boldsymbol{\theta}^k}(t) + \frac{\nabla[\kappa(\boldsymbol{\theta}^k)]}{\rho(\boldsymbol{\theta}^k)c_p(\boldsymbol{\theta}^k)} \cdot \nabla T^k, \\ T^{k+1}(0, \mathbf{x}) = T_0(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (5.3c)$$

$$\begin{cases} \partial_t P^{k+1} + \mathbf{u}^k \cdot \nabla P^{k+1} - \Delta P^{k+1} = \mathcal{H}_{\boldsymbol{\theta}^k}(t), \\ P^{k+1}(0, \mathbf{x}) = p_0, \end{cases} \quad (5.3d)$$

- ❸ Calcul du potentiel $\nabla\phi^{k+1}$:

$$\Delta\phi^{k+1} = \mathcal{G}_{\boldsymbol{\theta}^{k+1}}, \quad (5.3e)$$

- ❹ Calcul du champ de vitesse solénoïdal :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{w}^{k+1} = 0, \\ \rho(\boldsymbol{\theta}^k) \left[\partial_t \mathbf{w}^{k+1} + (\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{w}^{k+1} \right] - \mu_1 \Delta \mathbf{w}^{k+1} = \\ \quad - \nabla \pi^{k+1} - \rho(\boldsymbol{\theta}^k) \left[(\partial_t + \mathbf{u}^k \cdot \nabla) \nabla \phi^{k+1} - \mathbf{g} \right], \\ \mathbf{w}^{k+1}(0, \cdot) = \mathbf{w}_0, \end{cases} \quad (5.3f)$$

- ❺ Évaluation finale du champ de vitesse : $\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{w}^{k+1} + \nabla\phi^{k+1}$.

Remarquons tout d'abord que l'on a choisi une équation de type advection-diffusion pour la pression. Cette formulation est équivalente à l'EDO (5.1c) dont P^{k+1} est solution, d'après le **lemme 2.14**. On sait toutefois que P^{k+1} n'est fonction que du temps. De plus, cela fournit une évolution de même type pour les variables de base T et P qui composent $\underline{\theta}$. On peut donc regrouper les systèmes (5.3c) et (5.3d) :

$$\partial_t \underline{\theta}^{k+1} + (\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \underline{\theta}^{k+1} - \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{\kappa}(\underline{\theta}^k) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{D}(\underline{\theta}^k)} \Delta \underline{\theta}^{k+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{\beta}(\underline{\theta}^k) \mathcal{H}_{\theta^k}(t) + {}^t \nabla \underline{\theta}^k \frac{\partial \theta^k}{\rho c_p}(\underline{\theta}^k) \cdot \nabla T^k \\ \mathcal{H}_{\theta^k}(t) \end{pmatrix}}_{\mathcal{F}(\underline{\theta}^k)}. \quad (5.3cd)$$

On a remplacé ici au préalable P' par \mathcal{H}_{θ} , qui s'exprime à l'aide de dérivées spatiales de θ et non de dérivées temporelles. On conserve de plus le bon indice d'itération, *i.e.* \mathcal{H}_{θ^k} , tandis qu'en conservant $P^{k'}$, on aurait fait apparaître $\mathcal{H}_{\theta^{k-1}}$. On pourra également utiliser la notation suivante :

$$\partial_t \underline{\theta}^{k+1} + (\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \underline{\theta}^{k+1} = \mathcal{D}(\underline{\theta}^k) \Delta \underline{\theta}^{k+1} + \mathcal{F}(\underline{\theta}^k), \quad (5.3bcd)$$

$$\text{avec } \mathcal{D}(\underline{\theta}^k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\kappa}(\underline{\theta}^k) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{F}(\underline{\theta}^k) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{F}(\underline{\theta}^k) \end{pmatrix}.$$

Vérifions maintenant que le système itératif (5.3) est **bien posé** sous les hypothèses suivantes :

Hypothèse 5

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_0 \in \mathcal{H}^s(\mathbb{T}^d) \text{ et } Y_0 \text{ à valeurs dans } [0, 1], \\ \mathbf{u}_0 \in \mathcal{H}^{s-1}(\mathbb{T}^d) \text{ et } \mathbf{u}_0 \text{ satisfait la condition (5.2e) : } \nabla \cdot \mathbf{u}_0 = \mathcal{G}_{\theta_0}. \end{array} \right.$$

On impose une régularité supérieure pour Y_0 afin de satisfaire aux hypothèses du **lemme 2.11**. Ainsi, par récurrence et dès que $s \geq s_0 + 2$, en utilisant les **lemmes 2.11, 2.13** et **2.15**, la **proposition 2.3**, ainsi que les **corollaires 2.2** et **2.3** pour les régularités, on obtient l'existence et l'unicité des solutions des équations du système (5.3). Comme les équations du système (5.3) sont linéaires, le temps d'existence \mathcal{T}^k des solutions ne dépend que de celui des coefficients qui interviennent, donc par récurrence, de celui des données qui initialisent le processus itératif. Etant donné le choix fait pour cette initialisation, on en déduit que $\mathcal{T}^k = +\infty$ pour tout k . Cependant, afin d'assurer la validité des estimations de bornitude, on est amené à supposer le temps fini, auquel on va imposer des conditions. Comme démontré dans la suite, ces conditions sont indépendantes de l'indice d'itération k . On note donc $[0, \mathcal{T}]$ l'intervalle de temps commun sur lequel on considère les termes des suites. Les régularités fournies par les résultats théoriques sont donc :

$$\underline{\theta}^{k+1} \in \mathcal{X}_{s, \mathcal{T}}(\mathbb{T}^d), Y^{k+1} \in \mathcal{X}_{s-1, \mathcal{T}}(\mathbb{T}^d), \mathbf{u}^{k+1} \in \mathcal{X}_{s-1, \mathcal{T}}(\mathbb{T}^d) \text{ et } \nabla \pi^{k+1} \in \mathcal{X}_{s-3, \mathcal{T}}(\mathbb{T}^d).$$

Rappelons que la définition des espaces $\mathcal{X}_{\sigma, \mathcal{T}}(\mathbb{T}^d)$ est donnée dans le paragraphe 2.3. En particulier, la norme sur ces espaces est définie par :

$$\|f\|_{\sigma, \mathcal{T}}^2 = \sup_{t \in [0, \mathcal{T}]} \|f(t, \cdot)\|_{\sigma}^2 + \int_0^{\mathcal{T}} \|\nabla f(\tau, \cdot)\|_{\sigma}^2 d\tau.$$

La démonstration consiste donc en un jeu d'inégalités sur les normes de Sobolev des inconnues. À titre d'exemple, le terme $\|\nabla \theta^{k+1}\|_{\sigma}^2$ peut être majoré soit par $\|\theta^{k+1}\|_{\sigma+1}^2$ dès que $\sigma < s - 1$ (on fait ainsi intervenir le premier terme de la norme), soit par $\|\nabla \theta^{k+1}\|_{\sigma}^2$ dès que $\sigma \leq s - 1$ (ce qui implique le second terme de la norme).

5.3.2 Bornitude

Le point principal de cette section consiste à montrer que toutes les suites sont bornées dans les espaces cités ci-dessus et sur un certain intervalle de temps $[0, \mathcal{T}_*]$ que l'on précisera au cours de la preuve. L'hypothèse principale est que $s \geq s_0 + 3$. Cela permet d'une part d'avoir l'inclusion $\mathcal{X}_{\sigma, \mathcal{T}_*}(\mathbb{T}^d) \subset L^{\infty}([0, \mathcal{T}_*] \times \mathbb{T}^d)$, pour tout $\sigma \geq s - 3$, et d'autre part d'avoir la stabilité par produit de ce même espace $\mathcal{X}_{\sigma, \mathcal{T}_*}(\mathbb{T}^d)$.

Cette partie est donc consacrée à la preuve de la proposition suivante.

Proposition 5.1

Supposons $s \geq s_0 + 3$. Il existe $R_1 > 0$, $R_2 > 0$ et $L > 0$ suffisamment grands, et $\mathcal{T}_* > 0$ suffisamment petit tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait les estimations suivantes :

- $\|\underline{\theta}^k\|_{s, \mathcal{T}_*} \leq R_1$, $\|Y^k\|_{s-1, \mathcal{T}_*} \leq R_1$,
- $\|u^k\|_{s-1, \mathcal{T}_*} \leq R_2$,
- $\|\partial_t \theta^k\|_{s-2, \mathcal{T}_*} \leq L$,
- $\|\partial_t u^k\|_{s-3, \mathcal{T}_*} \leq L$,
- $\|\nabla \pi^k\|_{s-3, \mathcal{T}_*} \leq L$,
- $\sup_{t \in [0, \mathcal{T}_*]} |\underline{\theta}^k - \underline{\theta}_0|_{\infty} < \delta_G$.

Démonstration : On prouve la proposition précédente par récurrence. On choisit tout d'abord R_1 et R_2 de sorte que soient vérifiées les inégalités :

$$\|Y_0\|_{s-1} < R_1, \quad \|\underline{\theta}_0\|_s < R_1, \quad \|u_0\|_{s-1} < R_2. \quad (5.4)$$

Les inégalités strictes sont fondamentales pour la démonstration. Pour initialiser la récurrence, il suffit de vérifier que $\nabla \pi^0$ satisfait l'estimation souhaitée, puisque les dérivées temporelles sont nulles. On ne détaille pas les calculs ici, puisqu'ils sont analogues à ceux décrits dans la suite.

On suppose donc que les estimations sont vraies à l'itération k , sur un intervalle d'existence des solutions $[0, \mathcal{T}]$. On fait apparaître dans les inégalités un certain nombre de constantes, explicitées en fonction des constantes universelles introduites dans le chapitre 2. On omet cependant le plus souvent les dépendances par rapport à s et d pour ne

conserver que la dépendance par rapport à R_1 , R_2 et L . Les constantes sont soit données au cours de la démonstration, soit détaillées dans la remarque suivant la preuve. Dans un n -ième souci de clarté, on introduit une dernière notation, associée au **lemme 2.6** :

$$\mathcal{C}_c(f, \sigma, R) = C_{comp}(\sigma, d) \|f\|_{\infty, \bar{G}_0, \sigma} (1 + C_{sob}(s_0)R)^{\sigma-1} R,$$

de sorte que, dès que $\|\theta\|_{\sigma} \leq R$, on a :

$$\|f(\theta)\|_{\sigma} \leq \mathcal{C}_c(f, \sigma, R).$$

Établissons tout d'abord une estimation utile pour la suite, à savoir celle de \mathcal{H}_{θ^k} . En utilisant le **lemme 2.6** de composition, on obtient :

$$\begin{aligned} |\mathcal{H}_{\theta^k}(t)| &\leq \|\beta\|_{\infty, \bar{G}_0} \|\Gamma\|_{\infty, \bar{G}_0} \left\| \nabla \cdot \left[\kappa(\theta^k) \nabla T^k \right] \right\|_{\infty}(t) \\ &\leq C_{sob}(s_0) \|\beta\|_{\infty, \bar{G}_0} \|\Gamma\|_{\infty, \bar{G}_0} \left\| \nabla \cdot \left[\kappa(\theta^k) \nabla T^k \right] \right\|_{s_0}(t) \\ &\leq C_{sob} \|\beta\|_{\infty, \bar{G}_0} \|\Gamma\|_{\infty, \bar{G}_0} \left\| \kappa(\theta^k) \nabla T^k \right\|_{s_0+1}(t) \\ &\leq C_{sob} C_M(s-1, s_0+1) \|\beta\|_{\infty, \bar{G}_0} \|\Gamma\|_{\infty, \bar{G}_0} \left\| \kappa(\theta^k) \right\|_{s-1}(t) \left\| T^k \right\|_{s_0+2}(t) \\ &\leq C_{sob} C_M \|\beta\|_{\infty, \bar{G}_0} \|\Gamma\|_{\infty, \bar{G}_0} C_{comp} \|\kappa\|_{\infty, \bar{G}_0, s-1} \left(1 + |\theta^k|_{\infty}\right)^{s-2} \|\theta^k\|_{s-1} \left\| T^k \right\|_{s, \mathcal{F}_k'} \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $s > s_0 + 2$. On en déduit en particulier :

$$|\theta^k|_{\infty} \leq C_{sob}(s_0) \|\theta\|_s \leq C_{sob} R_1,$$

d'après l'hypothèse de récurrence. On en déduit finalement :

$$|\mathcal{H}_{\theta^k}(t)| \leq C_H(s, d, G_0, R_1) := C_{sob} C_M \|\beta\|_{\infty, \bar{G}_0} \|\Gamma\|_{\infty, \bar{G}_0} C_c(\kappa, s-1, R_1) R_1. \quad (5.5)$$

Remarquons ensuite qu'en alliant la majoration (**Lem.2.11.xii**) (en remplaçant s par $s-1$) aux commentaires de la remarque 2 (p. 45) et à l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{\mathcal{T}} \|\nabla \theta^k\|_{s-1}^2 d\tau &= \int_0^{\mathcal{T}} \|\nabla \underline{\theta}^k\|_{s-1}^2 d\tau + \int_0^{\mathcal{T}} \|\nabla Y^k\|_{s-1}^2 d\tau \\ &\leq \mathcal{T} \left[R_1^2 + e^{C_{adv,4} R_2 \sqrt{\mathcal{T}}} \|Y_0\|_s^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Ces deux majorations établies, on utilise dans la suite les estimations d'énergie associées aux équations d'advection et d'advection-diffusion (cf. **lemmes 2.11** et **2.13**), successivement pour majorer les normes des variables suivantes :

- ① Y^{k+1} en temps que solution de (5.3b),
- ② $\underline{\theta}^{k+1}$, solution de (5.3cd),
- ③ $\theta^{k+1} - \underline{\theta}_0$,
- ④ $\partial_t \theta^{k+1}$ dont l'équation d'évolution est déduite de (5.3bcd) en ne conservant que le terme de dérivée temporelle dans le membre de gauche et en se souvenant que P n'est fonction que du temps,

⑤ $\nabla \pi^{k+1}$, solution de :

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho(\boldsymbol{\theta}^k)} \nabla \pi^{k+1} \right) = \underbrace{-{}^t \nabla \mathbf{u}^k :: \nabla \mathbf{u}^{k+1} + \nabla [\tilde{\mu}(\boldsymbol{\theta}^k)] \cdot (\Delta \mathbf{u}^{k+1} - \nabla \mathcal{G}_{\boldsymbol{\theta}^{k+1}})}_{\mathcal{F}_k^\pi} - (\partial_t + \mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathcal{G}_{\boldsymbol{\theta}^{k+1}}, \quad (5.7a)$$

⑥ \mathbf{u}^{k+1} , solution de :

$$\rho(\boldsymbol{\theta}^k) [\partial_t \mathbf{u}^{k+1} + (\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{u}^{k+1}] - \mu_1 \Delta \mathbf{u}^{k+1} = -\nabla \pi^{k+1} + \rho(\boldsymbol{\theta}^k) \mathbf{g} - \mu_1 \nabla \mathcal{G}_{\boldsymbol{\theta}^{k+1}}, \quad (5.7b)$$

⑦ $\partial_t \mathbf{u}^{k+1}$.

L'égalité (5.7b) est établie à partir de l'équation d'advection-diffusion sur \mathbf{w} (5.3f), en divisant par $\rho(\boldsymbol{\theta}^k)$ et en réassociant les deux composantes du champ de vitesse $\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{w}^{k+1} + \nabla \phi^{k+1}$. Ceci fait apparaître des dérivées d'ordres supérieurs en ϕ^{k+1} , que l'on remplace par des dérivées de $\mathcal{G}_{\boldsymbol{\theta}^{k+1}}$ en utilisant l'équation (5.3e). L'équation (5.7a) se déduit en prenant la divergence de (5.7b) et en utilisant l'annexe A.1.

① On applique les **lemmes 2.11** et **2.12** ainsi que l'estimation (2.9) à l'équation (5.3b). Y^{k+1} est bien dans $\mathcal{X}_{s-1, \mathcal{T}}(\mathbb{T}^d)$ à valeurs dans $[0, 1]$ et vérifie, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} \left\| Y^{k+1} \right\|_{s-1, \mathcal{T}}^2 &\leq \|Y_0\|_s^2 (1 + \mathcal{T}) \exp \left[C_{adv,4} \left\| \mathbf{u}^k \right\|_{s-1, \mathcal{T}} \sqrt{\mathcal{T}} \right] \\ &\leq \|Y_0\|_s^2 (1 + \mathcal{T}) \exp \left[C_{adv,4} R_2 \sqrt{\mathcal{T}} \right]. \end{aligned}$$

Considérons le second membre comme une fonction continue de \mathcal{T} . Lorsque \mathcal{T} tend vers 0, ce second membre tend vers $\|Y_0\|_s^2$. Or, $\|Y_0\|_s^2 < R_1^2$. Il existe donc $\mathcal{T}_\clubsuit > 0$ tel que :

$$\|Y_0\|_s^2 (1 + \mathcal{T}_\clubsuit) \exp \left[C_{adv,4} R_2 \sqrt{\mathcal{T}_\clubsuit} \right] \leq R_1^2. \quad (5.8)$$

On a alors $\left\| Y^{k+1} \right\|_{s-1, \mathcal{T}_\clubsuit} \leq R_1$.

② De même que précédemment, on applique le **lemme 2.13** à l'équation (5.3cd), afin d'établir la majoration :

$$\left\| \underline{\boldsymbol{\theta}}^{k+1} \right\|_{s, \mathcal{T}}^2 \leq e^{\tilde{\zeta}_s(\mathcal{T})} \left(\left\| \underline{\boldsymbol{\theta}}_0 \right\|_s^2 + C_{adv-d,0} \int_0^{\mathcal{T}} \left\| \underline{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\theta}^k) \right\|_{s-1}^2(\tau) d\tau \right),$$

avec $\tilde{\zeta}_s(t) = C_{adv-d,1} \int_0^t \left(\left\| \nabla \underline{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\theta}^k) \right\|_{s-1}^2(\tau) + \left\| \mathbf{u}^k \right\|_{s-1}^2(\tau) + 1 \right) d\tau$. Les hypothèses du lemme sont vérifiées puisque la matrice $\underline{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\theta}^k)$ est diagonale à coefficients bornés, de borne inférieure commune $\underline{D}_1 > 0$.

En utilisant les différents lemmes de produit et de composition, sachant que $s > s + 1$, il vient :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\mathcal{T}} \|\nabla \underline{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\theta}^k)\|_{s-1}^2(\tau) \, d\tau &= \int_0^{\mathcal{T}} \|\nabla \boldsymbol{\theta}^k \partial_{\theta} \tilde{\kappa}(\boldsymbol{\theta}^k)\|_{s-1}^2 \, d\tau \\
 &\leq C_M^2 \int_0^{\mathcal{T}} \|\partial_{\theta} \tilde{\kappa}(\boldsymbol{\theta}^k)\|_{s-1}^2 \|\nabla \boldsymbol{\theta}^k\|_{s-1}^2 \, d\tau \\
 &\leq C_M^2 C_{comp}^2 \|\partial_{\theta} \tilde{\kappa}\|_{\infty, \bar{G}_0, s-1}^2 \int_0^{\mathcal{T}} (1 + |\boldsymbol{\theta}^k|_{\infty})^{2(s-2)} \|\nabla \boldsymbol{\theta}^k\|_{s-2}^2 \|\nabla \boldsymbol{\theta}^k\|_{s-1}^2 \, d\tau \\
 &\leq C_M^2 C_{comp}^2 \|\partial_{\theta} \tilde{\kappa}\|_{\infty, \bar{G}_0, s-1}^2 \left[1 + C_{sob} \|\boldsymbol{\theta}^k\|_{s-1, \mathcal{T}}\right]^{2(s-2)} \|\boldsymbol{\theta}^k\|_{s-1, \mathcal{T}}^2 \int_0^{\mathcal{T}} \|\nabla \boldsymbol{\theta}^k\|_{s-1}^2 \, d\tau.
 \end{aligned}$$

D'où, en utilisant l'hypothèse de récurrence ainsi que le résultat (5.6), on obtient successivement les inégalités :

$$\int_0^{\mathcal{T}} \|\nabla \underline{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\theta}^k)\|_{s-1}^2(\tau) \, d\tau \leq C_D(s, d, R_1) \mathcal{T} \left[R_1^2 + e^{C_{adv, A} R_2 \sqrt{\mathcal{T}}} \|Y_0\|_s^2 \right],$$

avec :

$$C_D(s, d, R_1) = C_M(s-1, s-1)^2 C_c(\partial_{\theta} \tilde{\kappa}, s-1, R_1)^2.$$

D'où :

$$\xi_s(\mathcal{T}) \leq C_{adv-d, 1} \left[C_D(R_1) \left(R_1^2 + e^{C_{adv, A} R_2 \sqrt{\mathcal{T}}} \|Y_0\|_s^2 \right) + R_2^2 + 1 \right] \mathcal{T}.$$

Majorons enfin, à l'aide de l'estimation (5.5), le second membre de (5.3cd) :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\mathcal{T}} \|\underline{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\theta}^k)\|_{s-1}^2(\tau) \, d\tau &\leq C_H^2(R_1) \left[2 \int_0^{\mathcal{T}} \|\tilde{\beta}(\boldsymbol{\theta}^k)\|_{s-1}^2(\tau) \, d\tau + \mathcal{T} |\mathbb{T}^d| \right] \\
 &\quad + 2C_M(s-1, s-1)^4 \int_0^{\mathcal{T}} \|\nabla \boldsymbol{\theta}^k\|_{s-1}^2 \left\| \frac{\partial_{\theta} \kappa}{\rho c_p}(\boldsymbol{\theta}^k) \right\|_{s-1}^2 \|\nabla T^k\|_{s-1}^2 \, d\tau, \\
 &\leq \underbrace{C_H^2 \left[|\mathbb{T}^d| + 2C_c(\tilde{\beta}, s-1, R_1)^2 \right]}_{C_{F,1}(s, d, G_0, R_1)} \mathcal{T} \\
 &\quad + \underbrace{2C_M^4 C_c \left(\frac{\partial_{\theta} \kappa}{\rho c_p}, s-1, R_1 \right)^2}_{C_{F,2}(s, d, G_0, R_1)} R_1^2 \left[R_1^2 + e^{C_{adv, A} R_2 \sqrt{\mathcal{T}}} \|Y_0\|_s^2 \right] \mathcal{T}.
 \end{aligned}$$

En conclusion, l'estimation d'énergie pour $\underline{\boldsymbol{\theta}}^{k+1}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \|\underline{\boldsymbol{\theta}}^{k+1}\|_{s, \mathcal{T}}^2 &\leq e^{C_{adv-d, 0} \mathcal{T}} \left[C_D(R_1) \left(R_1^2 + e^{C_{adv, A} R_2 \sqrt{\mathcal{T}}} \|Y_0\|_s^2 \right) + R_2^2 + 1 \right] \\
 &\quad \times \left[\|\underline{\boldsymbol{\theta}}_0\|_s^2 + C_{adv-d, 1} \mathcal{T} \left(C_{F,1}(R_1) + C_{F,2}(R_1) \left\{ R_1^2 + e^{C_{adv, A} R_2 \sqrt{\mathcal{T}}} \|Y_0\|_s^2 \right\} \right) \right].
 \end{aligned}$$

De la même manière que dans la partie ①, le second membre tend continûment vers $\|\underline{\boldsymbol{\theta}}_0\|_s^2 < R_1^2$ quand \mathcal{T} tend vers 0. Il existe donc $\mathcal{T}_{\diamond} \leq \mathcal{T}_{\clubsuit}$ suffisamment petit tel que :

$$\begin{aligned} & \exp \left[C_{adv-d,0} \mathcal{F}_\diamond \left(C_D(R_1) \left\{ R_1^2 + e^{C_{adv,4} R_2 \sqrt{\mathcal{F}_\diamond}} \|Y_0\|_s^2 \right\} + R_2^2 + 1 \right) \right] \\ & \times \left[\|\underline{\theta}_0\|_s^2 + C_{adv-d,1} \mathcal{F}_\diamond \left(C_{F,1}(R_1) + C_{F,2}(R_1) \left\{ R_1^2 + e^{C_{adv,4} R_2 \sqrt{\mathcal{F}_\diamond}} \|Y_0\|_s^2 \right\} \right) \right] \leq R_1^2, \end{aligned} \quad (5.9)$$

de sorte que $\|\underline{\theta}^{k+1}\|_{s, \mathcal{F}_\diamond} \leq R_1$.

③ La variable $\hat{\underline{\theta}}^{k+1} = \underline{\theta}^{k+1} - \underline{\theta}_0$ est solution du système :

$$\begin{cases} \partial_t \hat{\underline{\theta}}^{k+1} + (\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \hat{\underline{\theta}}^{k+1} - \underline{\mathcal{D}}(\underline{\theta}^k) \Delta \hat{\underline{\theta}}^{k+1} = \underline{\mathcal{F}}(\underline{\theta}^k) - (\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \underline{\theta}_0 + \underline{\mathcal{D}}(\underline{\theta}^k) \Delta \underline{\theta}_0, \\ \hat{\underline{\theta}}^{k+1}(0, \cdot) = 0. \end{cases}$$

On en déduit donc :

$$\|\hat{\underline{\theta}}^{k+1}\|_2^2(t) \leq C_{adv-d,1} e^{\xi_2(t)} \int_0^t \left\| \underline{\mathcal{F}}(\underline{\theta}^k) - (\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \underline{\theta}_0 + \underline{\mathcal{D}}(\underline{\theta}^k) \Delta \underline{\theta}_0 \right\|_1^2(\tau) d\tau.$$

Par ailleurs, en dimension 2 ou 3, \mathcal{H}^2 s'injecte continûment dans L^∞ , ce dont on déduit :

$$\left| \hat{\underline{\theta}}^{k+1} \right|_\infty(t) \leq C_{sob} \|\hat{\underline{\theta}}^{k+1}\|_2(t).$$

Or, comme précédemment, on a :

$$\begin{aligned} \|\underline{\mathcal{F}}(\underline{\theta}^k)\|_1^2 & \leq C_H^2 \left(|\mathbb{T}^d| + 2\|\tilde{\beta}(\underline{\theta}^k)\|_1^2 \right) \\ & \quad + 2C_M(s_0, s_0)^2 C_M(1, s_0)^2 \|\underline{\theta}^k\|_{s_0+1}^2 \|T^k\|_{s_0+1}^2 \left\| \frac{\partial_{\theta^k} \kappa}{\rho c_p}(\underline{\theta}^k) \right\|_1^2 \\ & \leq C_H^2 \left(|\mathbb{T}^d| + 2C_{comp}^2 \|\tilde{\beta}\|_{\infty, \bar{G}_0, 1}^2 R_1^2 \right) \\ & \quad + 2C_M(s_0, s_0)^2 C_M(1, s_0)^2 C_{comp}^2 R_1^6 \left\| \frac{\partial_{\theta^k} \kappa}{\rho c_p} \right\|_{\infty, \bar{G}_0, 1}^2 =: C_{F,3}(d, R_1). \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \left\| -(\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \underline{\theta}_0 + \underline{\mathcal{D}}(\underline{\theta}^k) \Delta \underline{\theta}_0 \right\|_1 & \leq C_M \left(\|\mathbf{u}^k\|_{s_0} \|\nabla \underline{\theta}_0\|_1 + \|\underline{\mathcal{D}}(\underline{\theta}^k)\|_{s_0} \|\Delta \underline{\theta}_0\|_1 \right) \\ & \leq C_{F,4}(d, R_1, R_2)^{1/2} \|\underline{\theta}_0\|_s. \end{aligned}$$

Quant à l'exposant, on a :

$$\begin{aligned} \xi_2(t) & = C_{adv-d,1}(2, d) \int_0^t \left[\|\nabla \underline{\mathcal{D}}(\underline{\theta}^k)\|_{s_0}^2 + \|\mathbf{u}^k\|_{s_0}^2 + 1 \right] \\ & \leq C_{adv-d,1} \left[t(R_2^2 + 1) + \int_0^t \|\tilde{\kappa}(\underline{\theta}^k)\|_{s_0+1}^2 \right] \leq C_{\xi,1}(d, R_1, R_2)t. \end{aligned}$$

D'où :

$$\left| \hat{\underline{\theta}}^{k+1} \right|_\infty^2(t) \leq 2C_{sob}^2 e^{C_{\xi,1}t} t (C_{F,3} + C_{F,4} \|\underline{\theta}_0\|_s^2).$$

Le second membre tend vers 0 lorsque t tend vers 0 donc il existe $\mathcal{T}_\heartsuit \leq \mathcal{T}_\diamond$ tel que :

$$2C_{sob}^2 \mathcal{T}_\heartsuit \exp [C_{\zeta,1} \mathcal{T}_\heartsuit] \left(C_{F,3} + C_{F,4} \|\underline{\theta}_0\|_s^2 \right) \leq \delta_G^2, \quad (5.10)$$

de sorte que $\|\underline{\hat{\theta}}^{k+1}\|_\infty < \delta_G$, ce qui assure que $\theta^{k+1} \in G_0$.

- ④ À partir de l'équation (5.3bcd), on évalue la norme de $\partial_t \theta^{k+1}$, en utilisant le **corollaire 2.3** :

$$\begin{aligned} \|\partial_t \theta^{k+1}\|_{s-2, \mathcal{T}} &\leq C_X \left[\|\mathbf{u}^k\|_{s-1, \mathcal{T}} \|\nabla \theta^{k+1}\|_{s-2, \mathcal{T}} + \|\tilde{\kappa}(\theta^k)\|_{s-2, \mathcal{T}} \|\Delta T^{k+1}\|_{s-2, \mathcal{T}} \right. \\ &\quad \left. + C_X \|\nabla \theta^{k+1}\|_{s-2, \mathcal{T}} \left\| \frac{\partial_\theta \kappa}{\rho c_p}(\theta^k) \right\|_{s-2, \mathcal{T}} \|\nabla T^{k+1}\|_{s-2, \mathcal{T}} \right] \\ &\quad + C_H \left[\|\tilde{\beta}(\theta^{k+1})\|_{s-2, \mathcal{T}} + |\mathbb{T}^d|^{1/2} \right], \\ &\leq C_{t\theta}(s, d, G_0, R_1, R_2), \end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence déjà établie pour θ^{k+1} . La constante $C_{t\theta}$ est explicitée dans la remarque 9, p. 196. D'où, pour $L \geq C_{t\theta}(R_1, R_2)$, on vérifie la condition souhaitée.

- ⑤ - ⑥ : les deux étapes suivantes sont traitées simultanément. On vérifie en premier lieu l'existence et l'unicité de $\nabla \phi^{k+1}$ (régularité elliptique), puis de w^{k+1} et $\nabla \pi^{k+1}$ par application de la **proposition 2.3**. Afin de prouver la proposition 5.1, on établit une majoration de la solution $\nabla \pi^{k+1}$ de l'équation (5.7a), majoration dans laquelle intervient \mathbf{u}^{k+1} . On l'injecte alors dans l'estimation d'énergie pour \mathbf{u}^{k+1} en tant que solution de (5.7b) et on conclut par un lemme de type *Grönwall*. On termine ensuite en combinant les deux majorations pour obtenir celle de $\nabla \pi^{k+1}$. On rappelle que dans le cadre de la proposition 5.1, on cherche à majorer la norme de $\nabla \pi^{k+1}$ par L , et celle de \mathbf{u}^{k+1} par R_2 . Il faut donc prêter attention aux dépendances des constantes pour assurer l'existence de tels L et R_2 .

Au préalable, on établit des estimations pour $\mathcal{G}_{\theta^{k+1}}$ et $\mathcal{H}'_{\theta^{k+1}}$. Avec :

$$\mathcal{G}_{\theta^{k+1}} = -\mathcal{H}_{\theta^{k+1}}(t) \tilde{\Gamma}(\theta^{k+1}) + \tilde{\alpha}(\theta^{k+1}) \nabla \cdot [\kappa(\theta^{k+1}) \nabla T^{k+1}] \in \mathcal{X}_{s-2, \mathcal{T}}(\mathbb{T}^d), \quad (5.11)$$

on a : $\|\mathcal{G}_{\theta^{k+1}}\|_{s-2, \mathcal{T}} \leq C_G(s, d, G_0, R_1)$. Se reporter à la remarque 9, p. 196, pour une expression de C_G . De même :

$$\begin{aligned} |\mathcal{H}'_\theta(t)| &\leq \left| \frac{\int_{\mathbb{T}^d} (\partial_t \theta \cdot \partial_\theta \beta) \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \beta \nabla \cdot (\partial_t \theta \cdot \partial_\theta \kappa \nabla T) + \beta \nabla \cdot (\kappa \nabla \partial_t T)}{\int_{\mathbb{T}^d} \frac{1}{\bar{\Gamma}}} \right| \\ &\quad + \left| \frac{\int_{\mathbb{T}^d} \frac{\partial_t \theta \cdot \partial_\theta \Gamma}{\bar{\Gamma}^2}}{\left(\int_{\mathbb{T}^d} \frac{1}{\bar{\Gamma}} \right)^2} \int_{\mathbb{T}^d} \beta \nabla \cdot (\kappa \nabla T) \right|. \end{aligned}$$

D'où, en utilisant les lemmes de composition, d'injection de Sobolev ainsi que les estimations déjà prouvées sur $\partial_t \boldsymbol{\theta}^{k+1}$:

$$|\mathcal{H}'_{\boldsymbol{\theta}^{k+1}}(t)| \leq C_{tH}(s, d, G_0, R_1, R_2).$$

On établit enfin une dernière estimation. Si χ est une fonction de $\boldsymbol{\theta}$, en notant $D_t^k = \partial_t + (\mathbf{u}^k \cdot \nabla)$ et en tenant compte du fait que \mathcal{H}^{s-3} est stable par multiplication pour $s \geq s_0 + 3$, on a :

$$\begin{aligned} \left\| D_t^k [\chi(\boldsymbol{\theta}^{k+1})] \right\|_{s-3} &= \left\| D_t^k \boldsymbol{\theta}^{k+1} \cdot \partial_{\boldsymbol{\theta}} \chi(\boldsymbol{\theta}^{k+1}) \right\|_{s-3} \\ &\leq C_M(s-3, s-3) C_c(\partial_{\boldsymbol{\theta}} \chi, s-3, R_1) \left\| D_t^k \boldsymbol{\theta}^{k+1} \right\|_{s-3}. \end{aligned}$$

Or, d'après l'équation (5.3bcd), on a :

$$\begin{aligned} \left\| D_t^k \boldsymbol{\theta}^{k+1} \right\|_{s-3} &\leq \left\| \mathcal{D}(\boldsymbol{\theta}^k) \Delta \boldsymbol{\theta}^{k+1} \right\|_{s-3} + \left\| \mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}^k) \right\|_{s-3} \\ &\leq C_M \left(\left\| \tilde{\kappa}(\boldsymbol{\theta}^{k+1}) \right\|_{s-3} + |\mathbb{T}^d|^{1/2} \right) \left\| \boldsymbol{\theta}^{k+1} \right\|_{s-1} \\ &\quad + C_H(R_1) \left(\sqrt{2} \left\| \tilde{\beta}(\boldsymbol{\theta}^k) \right\|_{s-3} + |\mathbb{T}^d|^{1/2} \right) \\ &\quad + \sqrt{2} C_M^2 \|T^{k+1}\|_{s-2} \left\| \boldsymbol{\theta}^k \right\|_{s-2} \left\| \frac{\partial_{\boldsymbol{\theta}} \kappa}{\rho C_p}(\boldsymbol{\theta}^k) \right\|_{s-3}. \end{aligned}$$

En combinant les deux dernières estimations, on aboutit à :

$$\left\| D_t^k [\chi(\boldsymbol{\theta}^{k+1})] \right\|_{s-3} \leq C_{D\chi}(\chi, s, d, G_0, R_1). \quad (5.12)$$

On s'intéresse maintenant à $\nabla \pi^{k+1}$, solution de l'équation (5.7a). Le **lemme 2.16** fournit la majoration ($\tau \in [0, t]$) :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\rho(\boldsymbol{\theta}^k)} \nabla \pi^{k+1} \right\|_{s-2}^2(\tau) &\leq C_{ell,1} \left\| \mathcal{F}_k^\tau \right\|_{s-3}^2(\tau) \\ &\leq 4C_{ell,1} \left[C_M^2 \left\| \mathbf{u}^k \right\|_{s-1,t}^2 \left\| \mathbf{u}^{k+1} \right\|_{s-1}^2(\tau) + C_M^2 \left\| \tilde{\mu}(\boldsymbol{\theta}^k) \right\|_{s-1,t}^2 \left\| \mathbf{u}^{k+1} \right\|_{s-1}^2(\tau) \right. \\ &\quad \left. + \left\| D_t^k \mathcal{G}_{\boldsymbol{\theta}^{k+1}} \right\|_{s-3}^2(\tau) + C_M^2 \left\| \tilde{\mu}(\boldsymbol{\theta}^k) \right\|_{s-1,t}^2 \left\| \mathcal{G}_{\boldsymbol{\theta}^{k+1}} \right\|_{s-2,t}^2 \right]. \quad (5.13) \end{aligned}$$

Pour traiter le terme $\left\| D_t^k \mathcal{G}_{\boldsymbol{\theta}^{k+1}} \right\|_{s-3}^2$, on utilise l'expression (5.11) :

$$\begin{aligned} D_t^k \mathcal{G}_{\boldsymbol{\theta}} &= -\mathcal{H}'_{\boldsymbol{\theta}} \tilde{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}) - \mathcal{H}_{\boldsymbol{\theta}} D_t^k [\tilde{\Gamma}(\boldsymbol{\theta})] + D_t^k [\tilde{\alpha}(\boldsymbol{\theta})] \nabla [\kappa(\boldsymbol{\theta})] \cdot \nabla T + \tilde{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) \nabla [\kappa(\boldsymbol{\theta})] \cdot D_t^k \nabla T \\ &\quad + \tilde{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) D_t^k \nabla [\kappa(\boldsymbol{\theta})] \cdot \nabla T + D_t^k [\tilde{\alpha}(\boldsymbol{\theta})] \kappa(\boldsymbol{\theta}) \Delta T + \tilde{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) D_t^k [\kappa(\boldsymbol{\theta})] \Delta T + \tilde{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) \kappa(\boldsymbol{\theta}) D_t^k \Delta T. \end{aligned}$$

Les différents produits se majorent comme précédemment. Cependant, deux termes (le premier et le dernier de la seconde ligne) posent problème quant à leur régularité, à savoir $\mathcal{X}_{s-4, \mathcal{F}}(\mathbb{T}^d)$. On rappelle en effet que $\partial_t \boldsymbol{\theta}^{k+1} \in \mathcal{X}_{s-3, \mathcal{F}}(\mathbb{T}^d)$. On prend donc garde aux termes $\left\| \nabla \boldsymbol{\theta}^{k+1} \right\|_{s-1}^2$ qui interviennent dans les intégrales de la norme sur

$\mathcal{X}_{s-1, \mathcal{T}}(\mathbb{T}^d)$. Pour le premier terme, on écrit :

$$\begin{aligned} D_t^k \nabla [\kappa(\boldsymbol{\theta})] &= D_t^k [{}^t \nabla \boldsymbol{\theta}] \partial_{\boldsymbol{\theta}} \kappa(\boldsymbol{\theta}) + {}^t \nabla \boldsymbol{\theta} D_t^k [\partial_{\boldsymbol{\theta}} \kappa(\boldsymbol{\theta})], \\ &= [{}^t \nabla D_t^k \boldsymbol{\theta} - \nabla \boldsymbol{\theta} \nabla \mathbf{u}^k] \partial_{\boldsymbol{\theta}} \kappa(\boldsymbol{\theta}) + {}^t \nabla \boldsymbol{\theta} D_t^k [\partial_{\boldsymbol{\theta}} \kappa(\boldsymbol{\theta})] \end{aligned}$$

En particulier, on utilise (5.3bcd) pour majorer $\|\nabla D_t^k \boldsymbol{\theta}^{k+1}\|_{s-3} \leq \|D_t^k \boldsymbol{\theta}^{k+1}\|_{s-2}$. Quant au second terme, on permute les opérateurs D_t^k et Δ :

$$D_t^k \Delta T = \Delta D_t^k T - \Delta \mathbf{u}^k \cdot \nabla T - 2 {}^t \nabla \mathbf{u}^k :: \text{Hess}(T).$$

De la même manière, l'équation (5.3c) permet de majorer $\|\Delta D_t^k T^{k+1}\|_{s-3}$. Finalement, on a, compte-tenu de (5.12) :

$$\|D_t^k \mathcal{G}_{\boldsymbol{\theta}^{k+1}}\|_{s-3}^2 \leq C_{tG,1}(R_1, R_2) + C_{tG,2}(R_1) \left(\|\nabla T^{k+1}\|_s^2 + \|\nabla \boldsymbol{\theta}^k\|_{s-1}^2 \right). \quad (5.14)$$

La combinaison de (5.13) et de (5.14) donne :

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{\rho(\boldsymbol{\theta}^k)} \nabla \pi^{k+1} \right\|_{s-2}^2 (\tau) \\ & \leq 4C_{ell,1} C_M^2 \overbrace{\left[R_2^2 + C_c(\tilde{\mu}, s-1, R_1)^2 \right]}^{C_{u,1}(R_1, R_2) / C_{adv-d,0}} \|\mathbf{u}^{k+1}\|_{s-1}^2 (\tau) + 4C_{ell,1} \left[C_c^2(\tilde{\mu}, s-1, R_1) C_G(R_1) \right. \\ & \quad \left. + C_{tG,1}(R_1, R_2) + C_{tG,2}(R_1) \left(\|\nabla T^{k+1}\|_s^2 + \|\nabla \boldsymbol{\theta}^k\|_{s-1}^2 \right) \right] (\tau). \end{aligned} \quad (5.15)$$

On sait par ailleurs qu'en tant que solution de l'EDP (5.7b), \mathbf{u}^{k+1} satisfait l'estimation d'énergie :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(t) &:= e^{-\tilde{\xi}_{s-1}(t)} \|\mathbf{u}^{k+1}\|_{s-1}^2(t) + \int_0^t e^{-\tilde{\xi}_{s-1}(\tau)} \|\nabla \mathbf{u}^{k+1}\|_{s-1}^2 d\tau \\ &\leq \|\mathbf{u}_0\|_{s-1}^2 + C_{adv-d,0} \int_0^t e^{-\tilde{\xi}_{s-1}(\tau)} \left\| \frac{-\nabla \pi^{k+1}}{\rho(\boldsymbol{\theta}^k)} + \mathbf{g} - \tilde{\mu}(\boldsymbol{\theta}^k) \nabla \mathcal{G}_{\boldsymbol{\theta}^{k+1}} \right\|_{s-2}^2 d\tau. \end{aligned} \quad (5.16)$$

En combinant (5.15) et (5.16), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(t) &\leq \mathcal{U}(0) + \overbrace{4C_{ell} C_M^2 C_{u,1}(R_1, R_2)}^{C_{u,A}(R_1, R_2)} \int_0^t \mathcal{U}(\tau) d\tau \\ &\quad + C_{u,2}(R_1, R_2) \int_0^t e^{-\tilde{\xi}_{s-1}(\tau)} d\tau + C_{u,3}(R_1). \end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Grönwall, on obtient :

$$\|\mathbf{u}^{k+1}\|_{s-1, \mathcal{T}}^2 \leq e^{\tilde{\xi}_{s-1}(\mathcal{T}) + C_{u,A} \mathcal{T}} \left(\|\mathbf{u}_0\|_{s-1}^2 + C_{u,2} \int_0^{\mathcal{T}} \underbrace{e^{-\tilde{\xi}_{s-1}(\tau) - C_{u,A} \tau}}_{\leq 1} d\tau + C_{u,3} \right).$$

Ici, $\tilde{\xi}_{s-1}(t) = C_{adv-d,1}(s-1) \int_0^t \left[\|\nabla \tilde{\mu}(\boldsymbol{\theta}^k)\|_{s-2}^2 + \|\mathbf{u}^k\|_{s-2}^2 + 1 \right] d\tau$.

Il vient donc $\xi_{s-1}(t) \leq C_{u,1}(R_1, R_2)t$, puis :

$$\left\| \mathbf{u}^{k+1} \right\|_{s-1, \mathcal{T}}^2 \leq e^{[(C_{u,1}+C_{u,4})(R_1, R_2)] \mathcal{T}} \left(\|\mathbf{u}_0\|_{s-1}^2 + C_{u,2}(R_1, R_2) \mathcal{T} + C_{u,3}(R_1) \right).$$

Le second membre tend vers $\|\mathbf{u}_0\|_{s-1}^2 + C_{u,3}(R_1)$ lorsque $\mathcal{T} \rightarrow 0$. On suppose donc que R_2 est assez grand pour vérifier :³

$$\boxed{\|\mathbf{u}_0\|_{s-1}^2 + C_{u,3}(R_1) < R_2^2.} \quad (5.17)$$

Il existe alors $\mathcal{T}_\spadesuit \leq \mathcal{T}_\heartsuit$ suffisamment petit pour que l'on ait :

$$e^{[(C_{u,1}+C_{u,4})(R_1, R_2)] \mathcal{T}_\spadesuit} \left(\|\mathbf{u}_0\|_{s-1}^2 + C_{u,2}(R_1, R_2) \mathcal{T}_\spadesuit + C_{u,3}(R_1) \right) \leq R_2^2, \quad (5.18)$$

ce dont on déduit :

$$\left\| \mathbf{u}^{k+1} \right\|_{s-1, \mathcal{T}_\spadesuit} \leq R_2.$$

On peut ensuite réutiliser ce résultat dans les majorations de $\nabla \pi^{k+1}$:

$$\begin{aligned} \|\nabla \pi^{k+1}(t, \cdot)\|_{s-3} &\leq C_{ell,2}(s, d, \rho(\boldsymbol{\theta}^k), \check{\rho}) \|\rho(\boldsymbol{\theta}^k) \mathcal{F}_\pi^k\|_{s-4} \\ &\leq C_{\pi,1}(s, d, G_0, R_1, R_2), \end{aligned}$$

d'après le **lemme 3.1** et les majorations précédemment établies, puis :

$$\int_0^{\mathcal{T}} \|\nabla^2 \pi^{k+1}(\tau, \cdot)\|_{s-3}^2 d\tau \leq C_{\pi,2}(s, d, G_0, R_1, R_2).$$

Il vient alors :

$$\left\| \nabla \pi^{k+1} \right\|_{s-3, \mathcal{T}} \leq C_\pi(s, d, G_0, R_1, R_2).$$

Il reste alors à prendre L suffisamment grand (tel que $L \geq C_\pi$) de sorte que l'on ait bien :

$$\left\| \nabla \pi^{k+1} \right\|_{s-3, \mathcal{T}} \leq L.$$

⑦ On écrit enfin :

$$\partial_t \mathbf{u}^{k+1} = -(\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{u}^{k+1} + \tilde{\mu}(\boldsymbol{\theta}^k) \Delta \mathbf{u}^{k+1} - \frac{\nabla \pi^{k+1}}{\rho(\boldsymbol{\theta}^k)} - \tilde{\mu}(\boldsymbol{\theta}^k) \nabla \mathcal{G}_{\theta^{k+1}} + \mathbf{g},$$

pour estimer :

³ D'où l'importance du fait que $C_{u,3}$ ne dépende que de R_1 .

$$\begin{aligned}
 \left\| \partial_t \mathbf{u}^{k+1} \right\|_{s-3, \mathcal{T}} &\leq |\mathbf{g}| \cdot |\mathbb{T}^d|^{1/2} + C_X(s-3, s-3) \left[\left\| \mathbf{u}^k \right\|_{s-3, \mathcal{T}} \left\| \mathbf{u}^{k+1} \right\|_{s-2, \mathcal{T}} \right. \\
 &\quad + \left\| \tilde{\mu}(\boldsymbol{\theta}^k) \right\|_{s-3, \mathcal{T}} \left\| \mathbf{u}^{k+1} \right\|_{s-1, \mathcal{T}} + \left\| \rho^{-1}(\boldsymbol{\theta}^k) \right\|_{s-3, \mathcal{T}} \left\| \nabla \pi^{k+1} \right\|_{s-3, \mathcal{T}} \\
 &\quad \left. + \left\| \tilde{\mu}(\boldsymbol{\theta}^k) \right\|_{s-3, \mathcal{T}} \left\| \mathcal{G}_{\boldsymbol{\theta}^{k+1}} \right\|_{s-3, \mathcal{T}} \right], \\
 &\leq |\mathbf{g}| \cdot |\mathbb{T}^d|^{1/2} + C_X(s-3, s-3) \left[R_2^2 + C_c(\tilde{\mu}, s-3, R_1) R_2 \right. \\
 &\quad \left. + C_c(\rho^{-1}, s-3, R_1) C_\pi(R_1, R_2) + C_c(\tilde{\mu}, s-3, R_1) C_G(R_1) \right] \\
 &\leq C_{tu}(s, d, G_0, R_1, R_2).
 \end{aligned}$$

On utilise ici la majoration de la norme de $\nabla \pi^{k+1}$ par C_π et non par L pour des raisons évidentes. On choisit alors L de sorte que $L \geq C_{tu}$ et $\left\| \partial_t \mathbf{u}^{k+1} \right\|_{s-3, \mathcal{T}} \leq L$.

Concluons enfin sur l'existence et le choix des constantes R_1, R_2, L et \mathcal{T}_* . Remarquons que les différentes contraintes sont **indépendantes** de k , ce qui est fondamental pour le passage à la limite. Tous les termes de la suite peuvent donc être considérés sur le même intervalle de temps $[0, \mathcal{T}_*]$. Ainsi, on choisit R_1 vérifiant (5.4), puis R_2 satisfaisant (5.17) et enfin :

$$L \geq \max\{C_{t\theta}(R_1, R_2), C_{tu}(R_1, R_2), C_\pi(R_1, R_2)\}.$$

Ces trois constantes étant fixées, on choisit finalement \mathcal{T}_* de sorte que les inégalités (5.8, 5.9, 5.10, 5.18) soient vérifiées.

Les solutions à chaque itération existent donc sur l'intervalle $[0, \mathcal{T}_*]$. Rien ne prouve toutefois que ce temps d'existence \mathcal{T}_* soit optimal, même si les estimations sont établies de la manière la plus précise possible. Ceci achève la démonstration de la **proposition 5.1**.

■

Remarque 8 – Comme les variables Y et $\boldsymbol{\theta}$ n'ont pas la même régularité, il était nécessaire d'adapter le lemme 3.6 [36] (donné sous la forme du **lemme 2.13** dans ce document). On y a affaibli les hypothèses sur le coefficient de diffusion. Dans sa version initiale, ce coefficient avait la même régularité que la solution. Toutefois, comme les coefficients de diffusion intervenant dans le système itératif (par exemple dans l'équation donnant $\boldsymbol{\theta}^{k+1}$) sont fonctions de $\boldsymbol{\theta}^k$, leur régularité est inférieure à celle de $\boldsymbol{\theta}^k$. C'est pourquoi on a démontré le **lemme 2.13**, avec un degré de régularité en moins pour le coefficient de diffusion. \diamond

Remarque 9 – On donne ici l'expression de quelques constantes intervenant dans la preuve :

$$\begin{aligned}
 C_{t\theta}(s, d, G_0, R_1, R_2) &= C_H(R_1) \left[C_c(\tilde{\beta}, s-1, R_1) + |\mathbb{T}^d|^{1/2} \right] \\
 &\quad + C_X(s-2) \left[R_1 R_2 + C_c(\tilde{\kappa}, s-1, R_1) + C_X(s-2) C_c \left(\frac{\partial_{\boldsymbol{\theta}} \kappa}{\rho c_p}, s-1, R_1 \right) \right].
 \end{aligned}$$

$$C_G(s, d, G_0, R_1) = C_H(R_1)C_c(\tilde{\Gamma}, s-1, R_1) \\ + C_X(s-2)C_X(s-1)C_c(\tilde{\alpha}, s-1, R_1)C_c(\kappa, s, R_1)R_1.$$

$$C_{tH}(R_1, R_2) = \frac{\|\Gamma\|_{\infty, \bar{G}_0} C_{t\theta}(s_0, R_1, R_2)C_M(1, s_0)}{|\mathbb{T}^d|} \left[\|\partial_\theta \beta\|_{\infty, \bar{G}_0} C_c(\kappa, 1, R_1)R_1 \right. \\ \left. + \|\beta\|_{\infty, \bar{G}_0} |\mathbb{T}^d|^{1/2} (C_M(1, s_0)C_c(\partial_\theta \kappa, 1, R_1)R_1 + C_c(\kappa, 1, R_1)) \right] \\ + \frac{\|\Gamma\|_{\infty, \bar{G}_0}^2}{|\mathbb{T}^d|} \left\| \frac{\partial_\theta \Gamma}{\Gamma^2} \right\|_{\infty, \bar{G}_0} \|\beta\|_{\infty, \bar{G}_0} C_{t\theta}(s_0, R_1, R_2)C_M(1, s_0)C_c(\kappa, 1, R_1)R_1.$$

$$C_{D\chi}(\chi, s, d, G_0, R_1) = C_M(s-3, s-3)C_c(\partial_\theta \chi, s-3, R_1) \times \\ \left[\sqrt{2}C_M^2(s-3, s-3)C_c\left(\frac{\partial_\theta \kappa}{\rho c_p}, s-3, R_1\right)R_1^2 + C_H(R_1) \left(\sqrt{2}C_c(\beta, s-3, R_1) + |\mathbb{T}^d|^{1/2} \right) \right. \\ \left. + C_M(s-3, s-3) \left(C_c(\kappa, s-3, R_1) + |\mathbb{T}^d|^{1/2} \right) R_1 \right].$$

◇

5.3.3 Convergence

La seconde étape de la preuve consiste à montrer que les suites convergent fortement dans des espaces $\mathcal{X}_{\sigma, \mathcal{T}}(\mathbb{T}^d)$, non pas pour des σ grands (et pour lesquels les suites sont bornées d'après la section précédente), mais pour des σ les plus petits possibles.

Le résultat que l'on démontre dans cette partie est le suivant :

Proposition 5.2

Quel que soit $\mathcal{T} \in]0, \mathcal{T}_*]$, les suites (Y^k) , $(\underline{\theta}^k)$ et (\mathbf{u}^k) convergent fortement dans les espaces $\mathcal{X}_{2, \mathcal{T}}(\mathbb{T}^d)$, $\mathcal{X}_{3, \mathcal{T}}(\mathbb{T}^d)$ et $\mathcal{X}_{2, \mathcal{T}}(\mathbb{T}^d)$ respectivement.

Comme pour l'étape de bornitude, la preuve de cette proposition repose sur des estimations d'énergie. On se place ici dans des espaces $\mathcal{X}_{\sigma, \mathcal{T}}(\mathbb{T}^d)$ pour des indices σ petits. Le choix de prendre $\sigma = 3$ pour $\underline{\theta}$ est tel que l'on obtient une norme L^2 ($\sigma = 0$) pour le second membre de (5.19d). Un des outils majeurs utilisés ici est le **lemme 2.7**, qui permet d'estimer les termes $\zeta(\underline{\theta}^{k+1}) - \zeta(\underline{\theta}^k)$.

Comme il sera détaillé ultérieurement, cette étape n'apporte **pas de contrainte supplémentaire sur le temps d'existence**. Afin de prouver la convergence des suites $(\underline{\theta}^k)$, (Y^k) et (\mathbf{u}^k) , on montre que les séries de termes généraux $\left\| \underline{\theta}^{k+1} - \underline{\theta}^k \right\|_{3, \mathcal{T}'}$, $\left\| Y^{k+1} - Y^k \right\|_{2, \mathcal{T}}$ et $\left\| \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k \right\|_{2, \mathcal{T}}$ convergent quel que soit $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}_*$. Ainsi, contrairement à la partie précédente, **on ne détaille pas les constantes**, que l'on indice par ordre d'apparition, et qui dépendent en toute généralité de s, d, G_0, R_1, R_2 et L .

Par soustraction de deux itérations successives du système (5.3), on a :

❶ Calcul de $\theta^{k+1} - \theta^k$:

$$\begin{cases} \partial_t(Y^{k+1} - Y^k) + \mathbf{u}^k \cdot \nabla(Y^{k+1} - Y^k) = -(\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}) \cdot \nabla Y^k, \\ (Y^{k+1} - Y^k)(0, \mathbf{x}) = 0, \end{cases} \quad (5.19a)$$

$$\begin{cases} \partial_t(\underline{\theta}^{k+1} - \underline{\theta}^k) + (\mathbf{u}^k \cdot \nabla)(\underline{\theta}^{k+1} - \underline{\theta}^k) - \underline{\mathcal{D}}(\theta^k)\Delta(\underline{\theta}^{k+1} - \underline{\theta}^k) \\ = \underline{\mathcal{F}}(\theta^k) - \underline{\mathcal{F}}(\theta^{k-1}) - [(\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}) \cdot \nabla] \underline{\theta}^k + [\underline{\mathcal{D}}(\theta^k) - \underline{\mathcal{D}}(\theta^{k-1})] \Delta \underline{\theta}^k, \\ (\underline{\theta}^{k+1} - \underline{\theta}^k)(0, \mathbf{x}) = 0, \end{cases} \quad (5.19b)$$

❷ Calcul de $\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k$:

$$\begin{cases} \partial_t(\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k) + (\mathbf{u}^k \cdot \nabla)(\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k) - \tilde{\mu}_k \Delta(\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k) = \\ - \left(\frac{\nabla \pi^{k+1}}{\rho_k} - \frac{\nabla \pi^k}{\rho_{k-1}} \right) - \tilde{\mu}_k \nabla \mathcal{G}_{\theta^{k+1}} + \tilde{\mu}_{k-1} \nabla \mathcal{G}_{\theta^k} \\ - [(\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}) \cdot \nabla] \mathbf{u}^k + [\tilde{\mu}_k - \tilde{\mu}_{k-1}] \Delta \mathbf{u}^k, \\ (\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k)(0, \mathbf{x}) = 0, \end{cases} \quad (5.19c)$$

❸ Calcul de $\nabla \pi^{k+1} - \nabla \pi^k$:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla \pi^{k+1} - \nabla \pi^k}{\rho_k} \right) = \mathcal{F}_k^\pi - \mathcal{F}_{k-1}^\pi - \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{\rho_k} - \frac{1}{\rho_{k-1}} \right) \nabla \pi^k \right]. \quad (5.19d)$$

Afin d'alléger une fois encore les notations, on a posé : $\zeta_k = \zeta(\theta^k)$ pour $\zeta \in \{\rho, \tilde{\mu}, \beta, \tilde{\beta}, \kappa, \tilde{\kappa}, \Gamma\}$. De même, on note respectivement les seconds membres des équations (5.19c) et (5.19d) $\delta \mathcal{F}_k^u$ et $\delta \mathcal{F}_k^\pi$:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{F}_k^u = & - \frac{\nabla \pi^{k+1} - \nabla \pi^k}{\rho_k} - \left(\frac{1}{\rho_k} - \frac{1}{\rho_{k-1}} \right) \nabla \pi^k - \tilde{\mu}_k \nabla (\mathcal{G}_{\theta^{k+1}} - \mathcal{G}_{\theta^k}) - (\tilde{\mu}_k - \tilde{\mu}_{k-1}) \nabla \mathcal{G}_{\theta^k} \\ & - [(\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}) \cdot \nabla] \mathbf{u}^k + (\tilde{\mu}_k - \tilde{\mu}_{k-1}) \Delta \mathbf{u}^k, \end{aligned} \quad (5.20a)$$

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{F}_k^\pi = & - {}^t \nabla \mathbf{u}^k \cdot (\nabla \mathbf{u}^{k+1} - \nabla \mathbf{u}^k) - {}^t \nabla \mathbf{u}^k \cdot (\nabla \mathbf{u}^k - \nabla \mathbf{u}^{k-1}) + \nabla \tilde{\mu}_k \cdot \Delta(\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k) \\ & + \nabla (\tilde{\mu}_k - \tilde{\mu}_{k-1}) \cdot \Delta \mathbf{u}^k - D_t^k (\mathcal{G}_{\theta^{k+1}} - \mathcal{G}_{\theta^k}) - \nabla \tilde{\mu}_k \cdot \nabla (\mathcal{G}_{\theta^{k+1}} - \mathcal{G}_{\theta^k}) \\ & - \left(\nabla (\tilde{\mu}_k - \tilde{\mu}_{k-1}) + \mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1} \right) \cdot \nabla \mathcal{G}_{\theta^k} - \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{\rho_k} - \frac{1}{\rho_{k-1}} \right) \nabla \pi^k \right]. \end{aligned} \quad (5.20b)$$

Démonstration : Commençons par écrire les estimations associées aux équations (5.19), dont les données initiales sont nulles.

❶ On applique le lemme 2.11 à l'équation d'advection avec second membre (5.19a).

$$\begin{aligned} e^{-\bar{\chi}_2(t)} \|Y^{k+1} - Y^k\|_2^2(t) + \int_0^t e^{-\bar{\chi}_2(\tau)} \|\nabla Y^{k+1} - \nabla Y^k\|_2^2(\tau) d\tau \\ \leq C_1 \int_0^t e^{-\bar{\chi}_2(\tau)} \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}\|_{2,\tau}^2 d\tau. \quad (\text{Prop.5.2.i}) \end{aligned}$$

② On s'intéresse ensuite à l'équation (5.19b), pour laquelle on a :

$$\begin{aligned} & e^{-\tilde{\zeta}_3(t)} \|\underline{\boldsymbol{\theta}}^{k+1} - \underline{\boldsymbol{\theta}}^k\|_3^2(t) + \int_0^t e^{-\tilde{\zeta}_3(\tau)} \|\nabla \underline{\boldsymbol{\theta}}^{k+1} - \nabla \underline{\boldsymbol{\theta}}^k\|_3^2 d\tau \\ & \leq 3C_{adv-d,0} \int_0^t e^{-\tilde{\zeta}_3(\tau)} \left[\|\underline{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\theta}^k) - \underline{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\theta}^{k-1})\|_2^2 + \left\| ((\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}) \cdot \nabla) \underline{\boldsymbol{\theta}}^k \right\|_2^2 \right. \\ & \quad \left. + \left\| [\underline{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\theta}^k) - \underline{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\theta}^{k-1})] \Delta \underline{\boldsymbol{\theta}}^k \right\|_2^2 \right] d\tau. \end{aligned}$$

Traisons chacun des termes de l'intégrale. On a tout d'abord, par application du **lemme 2.7** (dont on utilise les notations) :

$$\begin{aligned} \left\| [\underline{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\theta}^k) - \underline{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\theta}^{k-1})] \Delta \underline{\boldsymbol{\theta}}^k \right\|_2^2 &= \left\| [\tilde{\kappa}_k - \tilde{\kappa}_{k-1}] \Delta T^k \right\|_2^2 \\ &\leq C_M^2(2, s_0) R_1^2 \left\| \tilde{\kappa}_{\boldsymbol{\theta}^k, \boldsymbol{\theta}^{k-1}} (\boldsymbol{\theta}^k - \boldsymbol{\theta}^{k-1}) \right\|_2^2 \leq C_2 \|\boldsymbol{\theta}^k - \boldsymbol{\theta}^{k-1}\|_2^2. \end{aligned}$$

De même :

$$\left\| ((\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}) \cdot \nabla) \underline{\boldsymbol{\theta}}^k \right\|_2^2 \leq C_3 \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}\|_2^2.$$

On traite enfin le terme faisant intervenir $\underline{\mathcal{F}}$, dont la définition est donnée en (5.3cd).

On a :

$$\begin{aligned} & \|\underline{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\theta}^k) - \underline{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\theta}^{k-1})\|_2^2 \\ &= \left\| (\tilde{\beta}_k - \tilde{\beta}_{k-1}) \mathcal{H}_{\boldsymbol{\theta}^k} + \tilde{\beta}_{k-1} (\mathcal{H}_{\boldsymbol{\theta}^k} - \mathcal{H}_{\boldsymbol{\theta}^{k-1}}) + \left[\frac{\partial \boldsymbol{\theta}^k}{\rho c_p} - \frac{\partial \boldsymbol{\theta}^{k-1}}{\rho c_p} \right] \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}^k \nabla T^k \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial \boldsymbol{\theta}^k}{\rho c_p} \cdot \left[(\nabla \boldsymbol{\theta}^k - \nabla \boldsymbol{\theta}^{k-1}) \nabla T^k + \nabla \boldsymbol{\theta}^{k-1} (\nabla T^k - \nabla T^{k-1}) \right] \right\|_2^2 \\ & \quad + |\mathbb{T}^d| \cdot \|\mathcal{H}_{\boldsymbol{\theta}^k} - \mathcal{H}_{\boldsymbol{\theta}^{k-1}}\|_\infty^2. \end{aligned}$$

On majore chacun des termes à l'aide des résultats de la partie précédente sur le caractère borné des suites, ainsi que des **lemmes de composition 2.6 et 2.7**. En particulier, on a :

$$\|\mathcal{H}_{\boldsymbol{\theta}^k} - \mathcal{H}_{\boldsymbol{\theta}^{k-1}}\|_\infty \leq C_4 \|\boldsymbol{\theta}^k - \boldsymbol{\theta}^{k-1}\|_2.$$

En combinant les différentes majorations, il vient finalement :

$$\begin{aligned} & e^{-\tilde{\zeta}_3(t)} \|\underline{\boldsymbol{\theta}}^{k+1} - \underline{\boldsymbol{\theta}}^k\|_3^2(t) + \int_0^t e^{-\tilde{\zeta}_3(\tau)} \|\nabla \underline{\boldsymbol{\theta}}^{k+1} - \nabla \underline{\boldsymbol{\theta}}^k\|_3^2 d\tau \leq \int_0^t e^{-\tilde{\zeta}_3(\tau)} \left[C_5 \|\underline{\boldsymbol{\theta}}^k - \underline{\boldsymbol{\theta}}^{k-1}\|_3^2 \right. \\ & \quad \left. + C_6 \|\mathbf{Y}^k - \mathbf{Y}^{k-1}\|_2^2 + C_7 \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}\|_2^2 + C_8 \|\nabla \mathbf{Y}^k - \nabla \mathbf{Y}^{k-1}\|_2^2 \right] d\tau. \quad (\text{Prop.5.2.ii}) \end{aligned}$$

Les quatre constantes dépendent de R_1, s, d et $\tilde{\kappa}$.

③ On procède de même pour l'équation (5.19c) :

$$\begin{aligned} & e^{-\tilde{\zeta}_2(t)} \|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\|_2^2(t) + \int_0^t e^{-\tilde{\zeta}_2(\tau)} \|\nabla \mathbf{u}^{k+1} - \nabla \mathbf{u}^k\|_2^2 d\tau \\ & \leq C_{adv-d,0} \int_0^t e^{-\tilde{\zeta}_2(\tau)} \left\| \delta \mathcal{F}_k^u \right\|_1^2 d\tau. \end{aligned}$$

Parmi les termes à traiter dans l'expression (5.20a), le plus complexe est le suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\theta^{k+1}} - \mathcal{G}_{\theta^k} &= -\tilde{\Gamma}_{k+1}(\mathcal{H}_{\theta^{k+1}} - \mathcal{H}_{\theta^k}) - \mathcal{H}_{\theta^k}(\tilde{\Gamma}_{k+1} - \tilde{\Gamma}_k) + (\tilde{\alpha}_{k+1} - \tilde{\alpha}_k)\nabla \cdot (\kappa_{k+1}\nabla T^{k+1}) \\ &\quad + \tilde{\alpha}_k \left[\nabla(\kappa_{k+1} - \kappa_k) \cdot \nabla T^{k+1} + (\kappa_{k+1} - \kappa_k)\Delta T^{k+1} \right. \\ &\quad \left. + \nabla\kappa_k \cdot \nabla(T^{k+1} - T^k) + \kappa_k\Delta(T^{k+1} - T^k) \right]. \quad (\text{Prop.5.2.iii}) \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \|\nabla\mathcal{G}_{\theta^{k+1}} - \nabla\mathcal{G}_{\theta^k}\|_2^2 &\leq C_9\|\underline{\theta}^{k+1} - \underline{\theta}^k\|_3^2 + C_{10}\|Y^{k+1} - Y^k\|_2^2 \\ &\quad + C_{11}\|\nabla\underline{\theta}^{k+1} - \nabla\underline{\theta}^k\|_3^2 + C_{12}\|\nabla Y^{k+1} - \nabla Y^k\|_2^2. \quad (\text{Prop.5.2.iv}) \end{aligned}$$

Il vient donc :

$$\begin{aligned} &e^{-\tilde{\zeta}_2(t)}\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\|_2^2(t) + \int_0^t e^{-\tilde{\zeta}_2(\tau)}\|\nabla\mathbf{u}^{k+1} - \nabla\mathbf{u}^k\|_2^2 d\tau \\ &\leq \int_0^t e^{-\tilde{\zeta}_2(\tau)} \left[C_{13}\|\nabla\pi^{k+1} - \nabla\pi^k\|_1^2 + C_{14}\|\underline{\theta}^{k+1} - \underline{\theta}^k\|_3^2 + C_{15}\|Y^{k+1} - Y^k\|_2^2 \right. \\ &\quad \left. + C_{16}\|\nabla\underline{\theta}^{k+1} - \nabla\underline{\theta}^k\|_3^2 + C_{17}\|\nabla Y^{k+1} - \nabla Y^k\|_2^2 + C_{18}\|\underline{\theta}^k - \underline{\theta}^{k-1}\|_3^2 \right. \\ &\quad \left. + C_{19}\|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}\|_1^2 \right] d\tau. \quad (\text{Prop.5.2.v}) \end{aligned}$$

- ④ Il reste enfin à estimer le terme $\|\nabla\pi^{k+1} - \nabla\pi^k\|_1^2$ dans (Prop.5.2.v), en appliquant les résultats de régularité elliptique à l'équation (5.19d) :

$$\|\nabla\pi^{k+1} - \nabla\pi^k\|_1^2 \leq C_{ell,2}^2 \|\rho_k \delta\mathcal{F}_k^\pi\|_0^2.$$

On rappelle que $\delta\mathcal{F}_k^\pi$ est donné par (5.20b). Le point délicat est la majoration du terme $D_i^k(\mathcal{G}_{\theta^{k+1}} - \mathcal{G}_{\theta^k})$. Lorsque l'on applique l'opérateur de dérivée lagrangienne à l'expression (Prop.5.2.iii), on obtient des dérivées lagrangiennes soit de termes d'incrément $*^{k+1} - *^k$, soit de termes simples $*^{k+1}$ ou $*^k$. Dans le premier cas, on utilise le **lemme 2.7** et les équations du système (5.19), tandis que dans le second cas, on utilise la **proposition 5.1** qui fournit les bornes des différentes normes. Au final, on obtient :

$$\begin{aligned} &\|\nabla\pi^{k+1} - \nabla\pi^k\|_1^2 \\ &\leq C_{20}\|\underline{\theta}^{k+1} - \underline{\theta}^k\|_3^2 + C_{21}\|Y^{k+1} - Y^k\|_2^2 + C_{22}\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\|_2^2 \\ &\quad + C_{23}\|\nabla\underline{\theta}^{k+1} - \nabla\underline{\theta}^k\|_3^2 + C_{24}\|\nabla Y^{k+1} - \nabla Y^k\|_2^2 + C_{25}\|\underline{\theta}^k - \underline{\theta}^{k-1}\|_3^2 \\ &\quad + C_{26}\|Y^k - Y^{k-1}\|_2^2 + C_{27}\|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}\|_1^2 + C_{28}\|\nabla Y^k - \nabla Y^{k-1}\|_2^2. \quad (\text{Prop.5.2.vi}) \end{aligned}$$

On injecte alors (Prop.5.2.vi) dans (Prop.5.2.v) pour obtenir :

$$\begin{aligned} &e^{-\tilde{\zeta}_2(t)}\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\|_2^2(t) + \int_0^t e^{-\tilde{\zeta}_2(\tau)}\|\nabla\mathbf{u}^{k+1} - \nabla\mathbf{u}^k\|_2^2 d\tau \\ &\leq \int_0^t e^{-\tilde{\zeta}_2(\tau)} \left[C_{29}\|\underline{\theta}^{k+1} - \underline{\theta}^k\|_3^2 + C_{30}\|Y^{k+1} - Y^k\|_2^2 + C_{31}\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\|_2^2 \right. \\ &\quad \left. + C_{32}\|\nabla\underline{\theta}^{k+1} - \nabla\underline{\theta}^k\|_3^2 + C_{33}\|\nabla Y^{k+1} - \nabla Y^k\|_2^2 + C_{34}\|\underline{\theta}^k - \underline{\theta}^{k-1}\|_3^2 \right. \\ &\quad \left. + C_{35}\|Y^k - Y^{k-1}\|_2^2 + C_{36}\|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}\|_1^2 + C_{37}\|\nabla Y^k - \nabla Y^{k-1}\|_1^2 \right] d\tau. \quad (\text{Prop.5.2.vii}) \end{aligned}$$

⑤ On dispose donc des inégalités (Prop.5.2.i-Prop.5.2.ii-Prop.5.2.vii). À noter que dans ces estimations, les paramètres $\bar{\chi}_2$, ζ_3 et ζ_2 n'ont pas été fixés et doivent vérifier :

- $\bar{\chi}'_2(t) \geq 1 + C_{adv,1}(2, d) \|\nabla \mathbf{u}\|_{s_0}$;
- $\zeta'_3(t) \geq C_{adv-d,1}(3, d, \check{\kappa}) \left(\|\nabla \kappa_k\|_{s_0}^2 + \|\mathbf{u}^k\|_{s_0+1}^2 + 1 \right)$;
- $\zeta'_2(t) \geq C_{adv-d,1}(2, d, \check{\mu}) \left(\|\nabla \check{\mu}_k\|_{s_0}^2 + \|\mathbf{u}^k\|_{s_0+1}^2 + 1 \right)$.

On majore chacun des seconds membres et on choisit :

$$\bar{\chi}_2(t) = \zeta_3(t) = \zeta_2(t) = \Lambda(t),$$

où :

$$\Lambda(t) := t \cdot \max \left[\begin{array}{c} 1 + C_{adv,1}^2/2 + R_2^2 \\ C_{adv-d,1} (R_2^2 + C_c(s_0 + 1, \kappa, R_1)^2 + 1) \\ C_{adv-d,1} (R_2^2 + C_c(s_0 + 1, \check{\mu}, R_1)^2 + 1) \end{array} \right].$$

On pose alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\Lambda^k(t) &:= e^{-\Lambda(t)} \|Y^{k+1} - Y^k\|_2^2(t) + \int_0^t e^{-\Lambda(\tau)} \|\nabla Y^{k+1} - \nabla Y^k\|_2^2(\tau) d\tau \\ &\quad + e^{-\Lambda(t)} \|\underline{\theta}^{k+1} - \underline{\theta}^k\|_3^2(t) + \int_0^t e^{-\Lambda(\tau)} \|\nabla \underline{\theta}^{k+1} - \nabla \underline{\theta}^k\|_3^2 d\tau \\ &\quad + e^{-\Lambda(t)} \|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\|_2^2(t) + \int_0^t e^{-\Lambda(\tau)} \|\nabla \mathbf{u}^{k+1} - \nabla \mathbf{u}^k\|_2^2 d\tau. \end{aligned}$$

Ces choix étant faits, on utilise (Prop.5.2.i) et (Prop.5.2.ii) pour faire disparaître les termes de gradient $\nabla Y^{k+1} - \nabla Y^k$ et $\nabla \underline{\theta}^{k+1} - \nabla \underline{\theta}^k$ dans (Prop.5.2.vii). On somme alors l'inégalité obtenue avec (Prop.5.2.i-Prop.5.2.ii) :

$$\mathcal{N}_\Lambda^k(t) \leq \int_0^t \left[C_{38} \mathcal{N}_\Lambda^k(\tau) + C_{39} \mathcal{N}_\Lambda^{k-1}(\tau) + C_{40} e^{-\Lambda(\tau)} \|\nabla Y^k - \nabla Y^{k-1}\|_1^2(\tau) \right] d\tau.$$

Le **lemme 2.9** de *Grönwall* donne ici :

$$e^{-C_{38}t} \mathcal{N}_\Lambda^k(t) \leq \int_0^t e^{-C_{38}\tau} \left[C_{39} \mathcal{N}_\Lambda^{k-1}(\tau) + C_{40} e^{-\Lambda(\tau)} \|\nabla Y^k - \nabla Y^{k-1}\|_1^2(\tau) \right] d\tau.$$

Le dernier terme empêche de conclure directement. Sa présence est due, encore une fois, au fait que Y^k a une régularité inférieure à $\underline{\theta}^k$ car solution d'une équation d'advection et pas d'advection-diffusion. En son absence, on pourrait reprendre le raisonnement utilisé dans la démonstration du **théorème 3.1**, à savoir itérer pour obtenir une majoration par le terme général d'une série convergente. Ici, pour traiter ce terme, on utilise l'inégalité (Prop.5.2.i) à l'itération précédente, ce qui donne :

$$e^{-C_{38}t} \mathcal{N}_\Lambda^k(t) \leq \int_0^t e^{-C_{38}\tau} \left[C_{39} \mathcal{N}_\Lambda^{k-1}(\tau) + C_1 C_{40} \mathcal{N}_\Lambda^{k-2}(\tau) \right] d\tau. \quad (\text{Prop.5.2.viii})$$

Dans la méthode utilisée par Embid [36] ou Dellacherie et Lafitte [27], on cherche à imposer des contraintes sur les constantes apparaissant dans (Prop.5.2.viii) pour rendre la suite contractante. Dans cette optique, comme \mathcal{N}_Λ^k est croissante, on majore grossièrement par :

$$\mathcal{N}_\Lambda^k(t) \leq t e^{C_{38}t} \left[C_{39} \mathcal{N}_\Lambda^{k-1}(t) + C_1 C_{40} \mathcal{N}_\Lambda^{k-2}(t) \right].$$

La suite récurrente $u_k = \nu_1 u_{k-1} + \nu_2 u_{k-2}$ est le terme général d'une série convergente si les racines de l'équation caractéristique associée sont de modules strictement inférieurs à 1, ce qui est équivalent à $\nu_1 + \nu_2 < 1$, d'où la contrainte $t e^{C_{38}t} [C_{39} + C_1 C_{40}] < 1$.

Pendant, on raisonne ici différemment, en majorant plus finement les termes dans

l'inégalité (Prop.5.2.viii). On pose tout d'abord $\mathfrak{N}_k(t) := e^{-C_{33}t} \mathcal{N}_k^k(t)$. Ensuite, sans perte de généralité et quitte à majorer C_1, C_{39} et C_{40} par $\max\{C_1, C_{39}, C_{40}\}$, on suppose $C_1 = C_{39} = C_{40} = \nu$. D'où :

$$\mathfrak{N}_k(t) \leq \nu \int_0^t \mathfrak{N}_{k-1}(\tau) d\tau + \nu^2 \int_0^t \mathfrak{N}_{k-2}(\tau) d\tau.$$

La méthode consiste ici à constater que par récurrence, il existe des polynômes P_ℓ et Q_ℓ tels que :

$$\mathfrak{N}_k(t) \leq \nu^\ell \int_0^t \mathfrak{N}_{k-\ell}(\tau) P_\ell(t, \tau) d\tau + \nu^{\ell+1} \int_0^t \mathfrak{N}_{k-\ell-1}(\tau) Q_\ell(t, \tau) d\tau. \quad (\text{Prop.5.2.ix})$$

Ces polynômes sont donnés par $P_1(t, \tau) = Q_1(t, \tau) = 1$, puis par les relations de récurrence :

$$Q_{\ell+1}(t, \tau) = \int_\tau^t P_\ell(t, \sigma) d\sigma \quad \text{et} \quad P_{\ell+1}(t, \tau) = Q_{\ell+1}(t, \tau) + Q_\ell(t, \tau).$$

On vérifie qu'il existe $\hat{P}_\ell \in \mathbb{R}[X]$ et $\hat{Q}_\ell \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

$$P_\ell(t, \tau) = \hat{P}_\ell(t - \tau) \quad \text{et} \quad Q_\ell(t, \tau) = \hat{Q}_\ell(t - \tau).$$

Une étude rapide de ces polynômes montrent que :

$$\hat{P}_\ell = \sum_{j=\lfloor \frac{\ell+1}{2} \rfloor - 1}^{\ell-1} p_{\ell,j} X^j \quad \text{et} \quad \hat{Q}_\ell = \sum_{j=\lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor}^{\ell-1} q_{\ell,j} X^j,$$

avec :

$$p_{\ell+1,\ell} = \frac{p_{\ell,\ell-1}}{\ell} = \frac{1}{\ell!}, \quad q_{\ell+1,j} = \frac{p_{\ell,j-1}}{j} \quad \text{et} \quad p_{\ell+1,j} = q_{\ell+1,j} + q_{\ell,j}.$$

On a la relation :

$$q_{\ell+2,j+1} = \frac{q_{\ell+1,j} + q_{\ell,j}}{j+1}.$$

On détermine successivement les coefficients de degrés les plus hauts :

$$q_{\ell,\ell-1} = \frac{1}{(\ell-1)!}, \quad q_{\ell,\ell-2} = \frac{1}{(\ell-3)!}, \quad q_{\ell,\ell-3} = \frac{1}{2(\ell-5)!}, \quad q_{\ell,\ell-4} = \frac{1}{6(\ell-7)!}.$$

On conjecture puis on prouve que :

$$q_{\ell,\ell-j} = \frac{1}{(j-1)!(\ell-2j+1)!}.$$

Revenons à l'étude de la suite \mathfrak{N}_k . En prenant $\ell = k-1$ dans (Prop.5.2.ix) et en tenant compte du fait que les polynômes sont à coefficients positifs, on a :

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_k(t) &\leq \nu^{k-1} \int_0^t \mathfrak{N}_1(\tau) P_{k-1}(t, \tau) d\tau + \nu^k \int_0^t \mathfrak{N}_0(\tau) Q_{k-1}(t, \tau) d\tau, \\ &\leq |\mathfrak{N}_1|_\infty \nu^{k-1} Q_k(t, 0) + |\mathfrak{N}_1|_\infty \nu^k \int_0^t Q_{k-1}(t, \tau) d\tau. \quad (\text{Prop.5.2.x}) \end{aligned}$$

Étudions la série de terme général $\nu^{k-1} \hat{Q}_k(t)$, que l'on écrit :

$$\nu^{k-1} \hat{Q}_k(t) = \nu^{k-1} \sum_{j=\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}^{k-1} q_{k,j} t^j = \nu^{k-1} \sum_{j=0}^{\varphi(k)} q_{k,k-1-j} t^{k-1-j} = \sum_{j=0}^{\varphi(k)} \frac{\nu^{k-1} t^{k-1-j}}{j! (k-2j-1)!},$$

où $\varphi(k) = k - 1 - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$.

On sépare l'étude selon la parité de k . Si $k = 2p$, il vient :

$$v^{2p-1} \hat{Q}_{2p}(t) = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{v^{2p-1} t^{2p-1-j}}{j! (2p-2j-1)!} = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbf{a}_j \mathbf{b}_{p-1-j},$$

où $\mathbf{a}_j = \frac{(vt)^j}{j!}$ et $\mathbf{b}_j = \frac{(vt)^{2j+1}}{(2j+1)!}$. Comme ces deux suites sont les termes généraux de séries convergentes (séries exponentielles), on en déduit que $v^{2p-1} \hat{Q}_{2p}(t)$ est également le terme général d'une série convergente (produit de Cauchy). De même, si $k = 2p + 1$, il vient :

$$v^{2p} \hat{Q}_{2p+1}(t) = \sum_{j=0}^p \frac{v^{2p} t^{2p-j}}{j! (2p-2j)!} = \sum_{j=0}^p \mathbf{a}_j \hat{\mathbf{b}}_{p-j},$$

où $\hat{\mathbf{b}}_j = \frac{(vt)^{2j}}{(2j)!}$, terme général d'une série convergente. En combinant les deux cas (pair et impair), on obtient la convergence de la série de terme général $v^{k-1} \hat{Q}_k(t)$, avec :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} v^{k-1} \hat{Q}_k(t) = e^{v(v+1)t}.$$

Pour le second terme dans (Prop.5.2.x), les calculs sont identiques, au terme $\frac{1}{j+1}$ près (provenant de l'intégration), et que l'on majore par 1.

En conclusion, la série de terme général $\mathfrak{N}_k(t)$ converge pour tout $t \leq \mathcal{T}_*$. Comme la norme $\mathfrak{N}_k(\mathcal{T}_*)$ est équivalente à la norme $\mathcal{N}_0^k(\mathcal{T}_*)$, on en déduit que les suites (θ^k) , (Y^k) et (u^k) sont de Cauchy dans $\mathcal{X}_{3,\mathcal{T}_*}(\mathbb{T}^d)$ et $\mathcal{X}_{2,\mathcal{T}_*}(\mathbb{T}^d)$ respectivement. Comme ces espaces sont complets, ces suites sont convergentes, ce qui achève la démonstration. ■

5.3.4 Énoncé du théorème

La **proposition 5.2** fournit la convergence des suites θ^k , Y^k et u^k dans $\mathcal{X}_{3,\mathcal{T}_*}(\mathbb{T}^d)$ (pour la première) et $\mathcal{X}_{2,\mathcal{T}_*}(\mathbb{T}^d)$ (pour les deux dernières). On note $(\theta, Y, u) \in \mathcal{X}_{3,\mathcal{T}_*}(\mathbb{T}^d) \times \mathcal{X}_{2,\mathcal{T}_*}(\mathbb{T}^d)^2$ leurs limites. On ne démontre dans la suite que les résultats sur Y , mais la preuve est analogue pour les autres variables.

Par le **lemme 2.5** d'interpolation, on écrit, pour tout $s' \in \{2, \dots, s-2\}$:

$$\begin{aligned} \|Y^{n+p} - Y^n\|_{s'} &\leq \|Y^{n+p} - Y^n\|_2^{\frac{s-s'-1}{s-3}} \|Y^{n+p} - Y^n\|_{s-1}^{\frac{s'-2}{s-3}} \\ &\leq (2R_1)^{\frac{s'-2}{s-3}} \|Y^{n+p} - Y^n\|_2^{\frac{s-1-s'}{s-3}}. \end{aligned}$$

On montre ainsi que Y^k est de Cauchy respectivement dans $\mathcal{X}_{s',\mathcal{T}_*}(\mathbb{T}^d)$ $s' \in \{2, \dots, s-2\}$ et converge donc dans cet espace vers une limite qui ne peut être, par unicité, que Y . On en déduit que $Y \in \mathcal{X}_{s',\mathcal{T}_*}(\mathbb{T}^d)$ pour tout $s' \leq s-2$. On ne prouve cependant pas la convergence forte dans $\mathcal{X}_{s-1,\mathcal{T}_*}(\mathbb{T}^d)$. Pour montrer que la limite est bien dans l'espace souhaité, on utilise le caractère borné de Y^k dans cet espace (**proposition 5.1**) qui assure la convergence⁴ faible-* d'une sous-suite $(Y^{\psi(k)})$ dans $\mathcal{X}_{s-1,\mathcal{T}_*}(\mathbb{T}^d)$. Or, cette sous-suite converge également faiblement-* dans les espaces $\mathcal{X}_{s',\mathcal{T}_*}(\mathbb{T}^d)$ pour tout $s' \leq s-1$. On

⁴ La convergence n'est que faible-* du fait de la partie L^∞ de l'espace complet.

conclut encore une fois que cette limite est Y et on a finalement $Y \in \mathcal{X}_{s-1, \mathcal{T}_*}(\mathbb{T}^d)$. Il en est de même pour \mathbf{u} et $\boldsymbol{\theta}$. En particulier, ces fonctions sont continues en espace-temps.

L'estimation (Prop.5.2.vi) permet, de manière analogue, de justifier que la suite $\nabla \pi^k$ converge dans $\mathcal{X}_{s', \mathcal{T}_*}(\mathbb{T}^d)$ pour $s' < s - 3$ et que la limite Π est dans $\mathcal{X}_{s-3, \mathcal{T}_*}(\mathbb{T}^d)$. De plus, l'espace des champs de gradients étant fermé, on en déduit qu'il existe π tel que $\Pi = \nabla \pi$.

Il reste à prouver que les limites obtenues sont bien solutions du système d'EDP de départ. À partir des équations (5.3), on a dans $L^2(\mathbb{T}^d)$:

$$\begin{aligned} Y^{k+1} &= Y_0 - \int_0^t \mathbf{u}^k \cdot \nabla Y^{k+1} \, d\mathbf{x}, \\ \underline{\boldsymbol{\theta}}^{k+1} &= \underline{\boldsymbol{\theta}}_0 + \int_0^t \left[-(\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \underline{\boldsymbol{\theta}}^{k+1} + \underline{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\theta}^k) \Delta \underline{\boldsymbol{\theta}}^{k+1} + \underline{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\theta}^k) \right] \, d\mathbf{x}, \\ \mathbf{u}^{k+1} &= \mathbf{u}_0 + \int_0^t \left[-(\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{u}^{k+1} + \tilde{\mu}(\boldsymbol{\theta}^k) \Delta \mathbf{u}^{k+1} - \frac{1}{\rho(\boldsymbol{\theta}^k)} \nabla \pi^{k+1} + \mathbf{g} - \tilde{\mu}(\boldsymbol{\theta}^k) \nabla \mathcal{G}_{\boldsymbol{\theta}^{k+1}} \right] \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Les intégrandes sont uniformément bornés en temps dans $L^2(\mathbb{T}^d)$ et convergent simplement vers des limites appartenant à $\mathcal{C}^0([0, \mathcal{T}_*], L^2(\mathbb{T}^d))$. Le théorème de convergence dominée permet de conclure que Y , $\underline{\boldsymbol{\theta}}$ et \mathbf{u} sont solutions des équations intégrales souhaitées et sont ainsi solutions classiques du système (5.1) : en effet, avec $(Y, \partial_t Y) \in \mathcal{X}_{s-1, \mathcal{T}_*}(\mathbb{T}^d) \times \mathcal{X}_{s-2, \mathcal{T}_*}(\mathbb{T}^d) \subset \mathcal{C}^0([0, \mathcal{T}_*] \times \mathbb{T}^d)^2$, Y est de classe \mathcal{C}^1 en espace-temps.

L'unicité s'obtient classiquement en supposant qu'il existe deux solutions distinctes. L'absurdité s'obtient à l'aide des estimations d'énergie dont le second membre s'avère être nul.

On peut donc énoncer le résultat final :

Théorème 5.1

Soit s un entier tel que $s \geq s_0 + 3$, où $s_0 = E\left(\frac{d}{2}\right) + 1$. On suppose que $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathcal{H}^s(\mathbb{T}^d)$ et $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{H}^{s-1}(\mathbb{T}^d)$ vérifient les hypothèses 4 et 5. Alors sous les hypothèses 2 et 3, il existe un temps $\mathcal{T} > 0$ pour lequel il existe une unique solution classique $(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}, \nabla \pi)$ au système (5.1), de régularité :

- $Y \in \mathcal{X}_{s-1, \mathcal{T}}(\mathbb{T}^d)$, $\underline{\boldsymbol{\theta}} \in \mathcal{X}_{s, \mathcal{T}}(\mathbb{T}^d)$, $\partial_t \boldsymbol{\theta} \in \mathcal{X}_{s-2, \mathcal{T}}(\mathbb{T}^d)$,
- $\mathbf{u} \in \mathcal{X}_{s-1, \mathcal{T}}(\mathbb{T}^d)$, $\partial_t \mathbf{u} \in \mathcal{X}_{s-3, \mathcal{T}}(\mathbb{T}^d)$,
- $\nabla \pi \in \mathcal{X}_{s-3, \mathcal{T}}(\mathbb{T}^d)$.

De plus, pour tout $(t, \mathbf{x}) \in [0, \mathcal{T}] \times \mathbb{T}^d$, $\boldsymbol{\theta}(t, \mathbf{x}) \in G_0$.

5.3.5 Viscosité non constante

Dans le cas où μ est une variable strictement positive et fonction régulière de θ , le système (5.1) prend la forme suivante :

$$\partial_t Y + \mathbf{u} \cdot \nabla Y = 0, \quad (5.21a)$$

$$\rho c_p (\partial_t T + \mathbf{u} \cdot \nabla T) = \alpha T P'(t) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T), \quad (5.21b)$$

$$P'(t) = \mathcal{H}_\theta(t), \quad (5.21c)$$

$$\Delta \phi = \mathcal{G}_\theta, \quad (5.21d)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \quad (5.21e)$$

$$\begin{aligned} \rho [\partial_t \mathbf{w} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w}] - \mu \Delta \mathbf{w} = & -\nabla \pi + \rho \mathbf{g} - \rho [\partial_t \nabla \phi + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla \phi] \\ & + 2[D(\mathbf{w}) + \text{Hess}(\phi)] \nabla \mu + 2\mu \Delta \nabla \phi, \end{aligned} \quad (5.21f)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} + \nabla \phi. \quad (5.21g)$$

La linéarisation de l'équation (5.21f) s'effectue alors comme suit :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{w}^{k+1} = 0, \\ D_t^k \mathbf{w}^{k+1} - \tilde{\mu}_k \Delta \mathbf{w}^{k+1} = -\frac{1}{\rho_k} \nabla \pi^{k+1} + \mathbf{g} - D_t^k \nabla \phi^{k+1} \\ \quad + \frac{2}{\rho_k} [D(\mathbf{w}^k) + \text{Hess}(\phi^k)] \nabla \mu_k + 2\tilde{\mu}_k \Delta \nabla \phi^{k+1}. \end{cases} \quad (5.22)$$

On a posé, par cohérence avec ce qui précède, $\tilde{\mu} = \frac{\mu}{\rho}$. On en déduit les équations dont \mathbf{u}^{k+1} et $\nabla \pi^{k+1}$ sont solutions :

$$D_t^k \mathbf{u}^{k+1} - \tilde{\mu}_k \Delta \mathbf{u}^{k+1} = -\frac{1}{\rho_k} \nabla \pi^{k+1} + \mathbf{g} + \tilde{\mu}_k \nabla \mathcal{G}_{\theta^{k+1}} + \frac{2}{\rho_k} D(\mathbf{u}^k) \nabla \mu_k, \quad (5.23a)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \pi^{k+1}}{\rho_k} \right) = & -{}^t \nabla \mathbf{u}^k :: \nabla \mathbf{u}^{k+1} + \Delta \mathbf{u}^{k+1} \cdot \nabla \tilde{\mu}_k - D_t^k \mathcal{G}_{\theta^{k+1}} + 2\tilde{\mu}_k \Delta \mathcal{G}_{\theta^{k+1}} \\ & + \nabla \tilde{\mu}_k \cdot \nabla \mathcal{G}_{\theta^{k+1}} + 2\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_k} D(\mathbf{u}^k) \nabla \mu_k \right). \end{aligned} \quad (5.23b)$$

On conserve par ailleurs les équations du système (5.3) à l'exception de (5.3f). Soulignons tout d'abord les différences par rapport aux équations (5.7a-5.7b) : dans la première équation, le terme $-\tilde{\mu}_k \nabla \mathcal{G}_{\theta^{k+1}}$ devient $\tilde{\mu}_k \nabla \mathcal{G}_{\theta^{k+1}}$, et un terme supplémentaire apparaît : $\frac{2}{\rho_k} D(\mathbf{u}^k) \nabla \mu_k$. Ce terme ne présente cependant pas de difficulté particulière puisque de régularité $\mathcal{X}_{s-2, \mathcal{F}}(\mathbb{T}^d)$. Dans la seconde équation interviennent les termes $\Delta \mathcal{G}_{\theta^{k+1}}$ et $\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_k} D(\mathbf{u}^k) \nabla \mu_k \right)$ qui nécessitent un traitement particulier. Toutefois, ces termes ne présentent que des dérivées spatiales, ce qui est semblable à ce que nous avons traité précédemment. Il n'en demeure pas moins que ces nouveaux seconds membres vérifient les hypothèses nécessaires pour pouvoir appliquer le **lemme 2.13**, ce qui justifie que le schéma itératif est bien défini. Détaillons les modifications notables dans la démonstration.

Bornitude Pour la preuve du caractère borné en norme forte, seules les étapes ⑤-⑥ diffèrent. Dans la majoration de $\|\nabla\pi^{k+1}\|_{s-2}^2$, on a à estimer :

$$\|\Delta\mathcal{G}_{\theta^{k+1}}\|_{s-3}^2 \leq \|\nabla\mathcal{G}_{\theta^{k+1}}\|_{s-2}^2 \leq C_{Gxx}(R_1) \left(\|\nabla\theta^{k+1}\|_{s-1}^2 + \|\nabla T^{k+1}\|_s^2 \right).$$

De même :

$$\left\| \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_k} D(\mathbf{u}^k) \nabla \mu_k \right) \right\|_{s-3} \leq C_M^2 \|\rho^{-1}(\theta^k)\|_{s-2} \|D(\mathbf{u}^k)\|_{s-2} \|\mu(\theta^k)\|_{s-1} \leq C_{ux}(R_1, R_2).$$

On intègre ces deux inégalités à la majoration (5.15). En ce qui concerne l'estimation liée à l'équation (5.23a), on utilise ce qui précède pour le terme nouveau. Le reste du raisonnement est inchangé et l'inégalité (5.18) reste valable.

Convergence On reprend les parties ③ et ④. L'ajout des nouveaux termes se traduit par la nouvelle expression des seconds membres :

$$\begin{aligned} \delta\hat{\mathcal{F}}_k^\mu &= \delta\mathcal{F}_k^\mu + \left[D(\mathbf{u}^k) - D(\mathbf{u}^{k-1}) \right] \frac{\nabla\mu_k}{\rho_k} \\ &\quad + D(\mathbf{u}^{k-1}) \left[{}^t\nabla(\theta^k - \theta^{k-1}) \frac{\partial_\theta\mu}{\rho} \Big|_k + {}^t\nabla\theta^{k-1} \left(\frac{\partial_\theta\mu}{\rho} \Big|_k - \frac{\partial_\theta\mu}{\rho} \Big|_{k-1} \right) \right]. \\ \delta\hat{\mathcal{F}}_k^\pi &= \delta\mathcal{F}_k^\pi + 2\tilde{\mu}_k \Delta(\mathcal{G}_{\theta^{k+1}} - \mathcal{G}_{\theta^k}) + 2(\tilde{\mu}_k - \tilde{\mu}_{k-1}) \end{aligned}$$

Interviennent dans les estimations d'énergie les normes \mathcal{H}^1 de $\delta\hat{\mathcal{F}}_k^\mu$ et L^2 de $\delta\hat{\mathcal{F}}_k^\pi$. On a naturellement :

$$\begin{aligned} \|D(\mathbf{u}^k) - D(\mathbf{u}^{k-1})\|_1 &\leq \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}\|_2, \text{ puis :} \\ \|\delta\hat{\mathcal{F}}_k^\mu\|_1 &\leq \|\delta\mathcal{F}_k^\mu\|_1 + \hat{C}_1 \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}\|_2 + \hat{C}_2 \|\theta^k - \theta^{k-1}\|_2, \\ \|\Delta(\mathcal{G}_{\theta^{k+1}} - \mathcal{G}_{\theta^k})\|_0 &\leq \|\mathcal{G}_{\theta^{k+1}} - \mathcal{G}_{\theta^k}\|_2 \text{ déjà estimé par (Prop.5.2.iv).} \end{aligned}$$

Tous ces termes étant déjà présents, l'inégalité (Prop.5.2.vi) reste vraie et la fin de la démonstration identique. En conclusion, le **théorème 5.1** d'existence et d'unicité est valable à viscosité non constante, *i.e.* pour le système (5.21).

5.4 COMMENTAIRES

Le **théorème 5.1** fournit l'existence d'une solution au système DLMN sur un certain intervalle de temps $[0, \mathcal{T}_*]$. On est ainsi parvenu à construire une solution malgré la non-linéarité des équations et les couplages forts entre ces équations. Le temps d'existence est contraint par 4 inégalités, dont on a pris soin d'expliciter les constantes en fonction des différents paramètres du système. Ces contraintes sont plus complexes que pour le modèle ABV, ce qui ne permet pas de donner une expression explicite de \mathcal{T}_* . Une étude de ces contraintes permettra toutefois de donner un encadrement de ce temps, qui, compte tenu de cette étude, dépend des normes des données initiales de manière décroissante : plus les données sont grandes, plus R_1 , R_2 et L sont grands, plus \mathcal{T}_* est petit.

Il n'est cependant pas affirmé que ce temps est optimal. Comme on l'a vu dans le chapitre 3, il existe des configurations dans lesquelles le temps d'existence est infini. À noter que même si le résultat sur le modèle ABV n'a pas été utilisé en tant que tel, il s'est avéré très utile par la structure de sa démonstration qui a été appliquée ici. En particulier, par rapport aux travaux analogues de Embid [35], on s'est abstrait d'une condition sur \mathcal{T}_* , tout en améliorant la précision des autres conditions.

La régularité des données initiales prescrite par le théorème est \mathcal{H}^4 (en dimension 1) ou \mathcal{H}^5 (en dimensions 2 ou 3). On est donc éloigné du cas L^∞ correspondant à la modélisation des bulles. Tout principe de régularisation (au sens où on « lisse » les données initiales autour des interfaces sur une zone de taille $\varepsilon > 0$) est pour l'instant exclu, du fait que le temps d'existence décroît lorsque les données deviennent de plus en plus grandes, ce qui serait le cas pour $\varepsilon \rightarrow 0$. L'étude du cas particulier de la dimension 1, comme pour le modèle ABV, pourra apporter des indices sur le comportement en temps long de la solution. En particulier, l'équation elliptique en dimension 1 fournit le champ de vitesse (tout champ est un champ de gradient en dimension 1) sur $\Omega = [-1, 1]$:

$$u(t, x) = \frac{-P'(t)}{P(t)} \int_{-1}^x \frac{dy}{\Gamma(t, y)} + \int_{-1}^x \frac{\beta(t, y) \partial_x [\kappa(t, y) \partial_x T(t, y)]}{P(t)} dy.$$

En particulier, lorsque β est constant dans le domaine, la pression thermodynamique est constante avec $P(t) = p_0$, et :

$$u(t, x) = \frac{\beta_0}{p_0} \kappa(t, x) \partial_x T(t, x).$$

Ceci peut donner l'idée d'introduire un nouveau système intermédiaire, avec un champ de vitesse donné par le gradient de la température (l'approche bas Mach n'empêche pas de fortes variations de T).

Revenons au cas discontinu. On peut en effet s'interroger sur la pertinence physique du système DLMN, en particulier sur les propriétés caractéristiques de ce type d'écoulements, comme la conservation de la masse. Elle prend la forme dans ce système :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \mathcal{G}_\theta = \frac{-P'(t)}{\Gamma(\theta)P(t)} + \frac{\beta(\theta) \nabla \cdot (\kappa(\theta) \nabla T)}{P(t)}. \quad (5.24)$$

On peut ainsi se demander si, au sens des distributions, cette équation permet de recouvrer l'équation de continuité :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (5.25)$$

Pour cela, il est nécessaire de préciser la régularité de chaque terme apparaissant dans la transition faite dans le chapitre 1 entre ces deux équations. La dérivation de l'équation (5.24) à partir de (5.25) se fait en supposant suffisamment de régularité pour que les calculs soient valides. Le cheminement inverse est analogue, à partir du moment où l'on se place sous l'hypothèse 2, qui assure la régularité des coefficients thermodynamiques non pas par rapport à (t, x) , mais par rapport à θ . On suppose toutefois que toutes les variables sont continues par rapport à t .⁵

⁵ Ceci n'est pas déraisonnable dans la mesure où, pour le modèle ABV en dimension 1, la solution faible explicitée est bien continue par rapport à t .

Prenons $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(]0, \mathcal{T}[\times \Omega)$. On cherche à montrer que :

$$\langle \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}), \varphi \rangle = 0,$$

soit encore :

$$\langle D_t \rho, \varphi \rangle = - \int_{\Omega} \rho \mathcal{G}_{\theta} \varphi \, dx.$$

ρ (de même que \mathcal{G}_{θ}) est ici discontinue mais bornée, ce qui légitime l'écriture intégrale. on rappelle que les champs \mathbf{u} et $\kappa \nabla T$ sont continus à la traversée de l'interface. On souhaiterait donc écrire :

$$\langle D_t \rho, \varphi \rangle = - \frac{-P'(t)}{P(t)} \int_{\Omega} \frac{\rho(\boldsymbol{\theta})}{\Gamma(\boldsymbol{\theta})} \varphi \, dx + \left\langle \frac{\rho(\boldsymbol{\theta}) \beta(\boldsymbol{\theta}) \nabla \cdot (\kappa(\boldsymbol{\theta}) \nabla T)}{P(t)}, \varphi \right\rangle.$$

Le problème est que le second membre n'est pas défini car produit de distributions. Il est cependant envisageable, en reformulant \mathcal{G}_{θ} , d'arriver à légitimer la transition entre (5.24) et (5.25). Les calculs sont justes si l'on se place dans un sous-domaine ω ne contenant pas l'interface (les variables sont régulières dans chaque fluide). Le cœur du problème est de justifier les calculs à la traversée de l'interface, en utilisant les conditions de transmission. On peut citer les travaux de Dellacherie [24], dans lesquels sont donnés certains résultats qualitatifs sur le modèle, comme la conservation des masses partielles ou de l'énergie (Lemma 3.1). Le rôle du coefficient β y est également mis en valeur, son signe influant sur la dilatation ou la contraction de la phase vapeur (Lemma 3.2). Des études similaires sont donc encore à mener, tant sur le caractère global en temps du système pour le cas régulier, que sur les propriétés générales pour le cas discontinu.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans ce travail de thèse, nous nous sommes intéressés à la mise en équation des mécanismes physiques à prendre en compte dans le contexte des écoulements diphasiques à bas nombre de Mach et à l'échelle des bulles. Nous nous sommes basés sur les travaux antérieurs de *S. Dellacherie*, travaux eux-mêmes inspirés de ceux d'*Embid* et de *Majda* sur la modélisation des phénomènes de combustion lente. Afin d'étudier le système ainsi obtenu et nommé DLMN, nous avons réutilisé (et parfois amélioré) les principaux résultats théoriques développés par *Embid*, du fait de caractéristiques communes entre les deux systèmes (DLMN et modèle de combustion), à commencer par l'approche bas Mach.

Pour justifier la légitimité mathématique du système DLMN, nous avons été amenés, dans le cadre d'une première approche, à étudier d'autres modèles, moins complexes en termes de couplages et de non-linéarités. Une partie importante de ce manuscrit a ainsi été consacrée à l'étude globale du modèle ABV. Bien qu'extrêmement simplifié, ce couplage hyperbolique-elliptique a révélé des propriétés intéressantes. Outre le fait que nous avons pu tester¹ les outils théoriques inhérents aux démonstrations d'existence et d'unicité de solutions régulières, nous avons prouvé un certain nombre de résultats tels que l'expression explicite de la moyenne des solutions,² une estimation du temps d'existence, l'influence de la fonction ψ intervenant dans le modèle ou encore l'existence de solutions (faibles et classiques) globales en temps en dimension 1, ce qui fournit des informations qualitatives sur les solutions. En particulier, les solutions restent bornées dans le même intervalle que la donnée initiale (qui transmet aux solutions d'autres propriétés comme la parité). Nous avons également prouvé que si la donnée initiale était de type créneau (en dimension 1 ou en dimensions supérieures dans le cas d'une symétrie radiale), il existait des solutions de type créneau, ce qui légitime l'introduction de ce modèle simplifié, ainsi que sa dénomination.

Grâce à l'expérience apportée par l'étude du modèle ABV, nous avons pu ensuite traiter le système DLMN selon le même plan. Après avoir adapté (aux équations d'advection) certaines estimations d'énergie pour un espace fonctionnel particulier (propre aux équations d'advection-diffusion) en portant la plus grande attention à la régularité de chaque terme, nous avons établi la preuve de l'existence et de l'unicité de solutions classiques pour le système DLMN. Celle-ci repose d'une part sur la forme des non-linéarités, que nous définissons en fonction de la régularité nécessaire et des propriétés propres à chaque fluide (lois d'état et de comportement), et d'autre part sur la combinaison d'estimations en norme de Sobolev (estimations de produits, de compositions, ...). Le schéma de la preuve est, comme pour le modèle ABV, décomposé en deux étapes : l'une consacrée au caractère borné de la suite, et l'autre à la convergence dans un certain espace.

¹ « rôder » dans la perspective de les appliquer dans le cadre du système DLMN.

² Ce type de propriété semble spécifique à ce modèle.

Les aspects théoriques étant en partie traités, nous avons ensuite porté notre attention sur les outils à mettre en œuvre pour simuler numériquement les solutions du modèle ABV. Notre algorithme de capture d'interface reposant sur le modèle lui-même *via* le transport de la fraction massique de la phase vapeur, l'étude a été en grande partie consacrée à l'équation de transport. Des simulations avaient été réalisées, antérieurement à cette thèse, pour des données discontinues, à l'aide du schéma anti-diffusif de *Després* et *Lagoutière*, permettant ainsi de préserver au niveau discret le caractère infiniment mince des interfaces. Cependant, il a été mis en évidence que les bonnes propriétés numériques de ce schéma n'étaient pas suffisantes dans certaines configurations. Des études ont alors été initiées afin d'assurer la précision de la méthode au moyen d'un algorithme de raffinement adaptatif de maillages, apportant ainsi des résultats probants (au cours du stage d'*A. Mekkas*).

Toutefois, dans la mesure où l'étude théorique s'est faite principalement dans le cadre régulier, il convenait de simuler également les solutions classiques. Le schéma précédent n'étant plus adapté, nous avons proposé une nouvelle méthode des caractéristiques numérique d'ordre 2, basée sur le constat que la montée en ordre dans l'étape d'interpolation spatiale pouvait induire des oscillations numériques, quelle que soit la formule utilisée. Ce constat est en accord avec le théorème de Godunov sur la monotonie des schémas linéaires d'ordre supérieur à 1. Nous avons réinterprété ce principe par des considérations géométriques puis, en combinant deux schémas d'interpolation, nous avons construit une méthode en dimension 1, stable, consistante et préservant le principe du maximum. Ce schéma est appelé MOC2 et est d'ordre 2. En effet, en plus de la montée en ordre sur l'étape d'interpolation, on améliore la précision sur l'approximation de la caractéristique, par un développement limité du flot. L'indépendance de ces deux étapes permet de traiter des nombres de Courant aussi grands que l'on souhaite, du fait de la stabilité inconditionnelle.

Étudions maintenant les pistes de recherche potentielles sur la thématique de la modélisation des bulles. En premier lieu, concernant le modèle ABV, il reste un certain nombre de questions ouvertes, comme celle du temps d'existence des solutions. L'estimation prouvée dans ce document résulte en effet de la méthode choisie. Or, nous avons d'une part prouvé que cette estimation n'est pas optimale en dimension 1, et d'autre part réalisé des simulations qui semblent ne pas présenter d'explosion en temps fini. Ceci laisse penser qu'en réalité, le temps d'existence est infini. Une des pistes évoquées est de prouver le résultat d'existence pour des données Sobolev à indices non entiers. Parmi les autres questions ouvertes, il demeure celle des solutions faibles, car si certaines ont été explicitées en dimension 1, leur unicité et leur existence en dimensions supérieures restent à prouver. La notion d'approximation parabolique pour l'équation de transport semble pouvoir apporter des réponses. Une autre question est la justification de la remontée vers le système DLMN, en particulier dans le cas des solutions faibles.

Pour ce qui est du système DLMN, la question du temps d'existence des solutions régulières se pose également. Même si nous avons réussi à nous abstraire de certaines contraintes par rapport à des travaux antérieurs, les conditions qui portent sur le temps d'existence (imposées par la méthode choisie) diminuent la portée du résultat. Ce dernier a cependant le mérite de justifier que le système est bien posé. Un autre problème, fondamental, consistera à terme à déterminer s'il existe des solutions en créneau lorsque la donnée initiale l'est (légitimant ainsi l'étude de ce système dans le cadre de la modélisation des bulles).

Pour bénéficier plus largement des enseignements tirés de l'analyse du modèle ABV, la remontée vers le système DLMN devra alors passer par des systèmes intermédiaires, à commencer par DLMN-p (1.15). Par exemple, il semble intéressant de considérer le cas particulier où le facteur $\beta = \bar{\beta}$ est constant dans tout le domaine (ou tout du moins homogène en espace). Compte-tenu de la condition aux limites $\kappa \nabla T \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0$, il vient $\mathcal{H}_0 = 0$ et $P(t) = p_0$. Le système prend donc la forme :

$$\begin{cases} \partial_t Y_1 + \nabla \phi \cdot \nabla Y_1 = 0, \\ \Delta \phi = \frac{\bar{\beta}}{p_0} \nabla \cdot (\kappa \nabla T), \\ \partial_t T + \nabla \phi \cdot \nabla T - \frac{1}{\rho c_p} \nabla \cdot (\kappa \nabla T) = 0. \end{cases} \quad (\text{DLMN-}\beta)$$

L'intérêt de supposer un tel cas est de n'ajouter par rapport au modèle ABV qu'une seule équation (parabolique) d'advection-diffusion. À noter que lorsque $\kappa = \bar{\kappa}$ est également constant, il vient :

$$\phi = \frac{\bar{\beta}\bar{\kappa}}{p_0} [T - \mu_{\Omega}(T)].$$

L'équation de Poisson peut donc être ignorée, l'équation sur T devenant :

$$\partial_t T + \frac{\bar{\beta}\bar{\kappa}}{p_0} |\nabla T|^2 - \frac{\bar{\kappa}}{\rho c_p} \Delta T = 0.$$

L'introduction de DLMN- β peut s'avérer utile autant du point de vue théorique que du point de vue numérique, afin de complexifier progressivement les études.

Une étape ultérieure consistera à enrichir le modèle. En effet, nous avons considéré ici les bulles déjà formées (pas d'ébullition, ni de changement de phase). De plus, par l'absence de termes modélisant la tension de surface et les forces de capillarité, tout phénomène de coalescence est rendu impossible. Or, ces phénomènes sont des mécanismes inhérents aux écoulements de bulles et devront, à terme, être pris en compte. Parmi les pistes possibles, on peut citer les travaux de Facanoni [39] sur la crise d'ébullition tant du point de vue théorique que numérique, ou de Lakehal *et al.* [57]. Quant aux forces surfaciques, on peut citer [9], le point-clé étant le calcul de la courbure moyenne [37]. Des premières études ont été réalisées sur ce dernier point au CEA.

Du point de vue numérique, nous distinguons deux axes. Le premier concerne les solutions classiques avec la perspective d'étendre le schéma MOC2 à la dimension 2 pour des maillages cartésiens (non nécessairement uniformes), ce qui est motivé par l'étude effectuée en dimension 1. On pourra aussi affiner l'étude du cas de l'équation de Burgers afin de valider le traitement du choc. Une autre étape consistera à utiliser le schéma dans d'autres contextes (méthode *level set*, systèmes de lois de conservation). Le second est l'application du couplage DL-AMR au modèle ABV en dimension 3, puis au système DLMN- p (ou DLMN- β), ajoutant ainsi une équation d'advection-diffusion-réaction (ou juste d'advection-diffusion). La dernière étape consistera à coupler un solveur de type Navier-Stokes incompressible (de type MAC par exemple) pour recomposer le système DLMN dans son intégralité.

À noter que, pour le modèle ABV, le résultat portant sur les moments des solutions fournit un test de précision pour les méthodes numériques. En effet, à défaut de connaître la solution, on dispose d'une quantité exacte et facilement calculable. Si la moyenne (moment d'ordre 1) a un sens physique, représentant le volume, elle peut s'avérer non pertinente du fait de phénomènes de compensation. En revanche, la norme L^2 (moment d'ordre 2), est une quantité que l'on pourra utiliser pour évaluer la précision des schémas.

En conclusion, nous avons tenté d'apporter, par ce travail, un certain nombre d'éléments d'information sur le comportement des solutions du modèle ABV, d'améliorer la connaissance globale des propriétés des solutions dans un cadre régulier, permettant d'envisager une application à terme du système DLMN à des cas concrets. Cependant, une étude approfondie des solutions faibles semble nécessaire, dans la mesure où les données que l'on souhaite modéliser sont des fonctions discontinues.

QUELQUES OUTILS MATHÉMATIQUES SUPPLÉMENTAIRES

A

Cette annexe est consacrée à quelques notations, rappels ou preuves de résultats. En particulier, dans le premier paragraphe, on donne une liste de formules de dérivation (produits, composition d'opérateurs différentiels, de fonctions à valeurs vectorielles ou matricielles) utilisées couramment dans ce mémoire, tandis que dans le second, on s'intéresse à une propriété annexe de la formule de la moyenne (**théorème 3.3**).

A.1 IDENTITÉS DIFFÉRENTIELLES

On a ainsi les identités :

1. $\nabla \cdot D(\mathbf{u}) = \frac{\Delta \mathbf{u} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})}{2}$;
2. $D(\mathbf{u})\mathbf{u} \cdot \mathbf{f} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{u} \cdot \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}) + \mathbf{f} \cdot \nabla \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) \right]$;
3. $\nabla \cdot [(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v}] = {}^t\nabla\mathbf{u} :: \nabla\mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})$;
4. $\nabla\mathbf{u} \times \mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$;
5. $\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = \mathbf{A}(\nabla f) + f(\nabla \cdot \mathbf{A})$; en particulier, $\nabla \cdot (f\underline{\mathbf{Id}}) = \nabla f$;
6. $\nabla \cdot (\mathbf{A}\mathbf{u}) = {}^t\mathbf{A} :: \nabla\mathbf{u} + (\nabla \cdot {}^t\mathbf{A}) \cdot \mathbf{u}$;
7. $\nabla \cdot \text{Hess}(f) = \nabla\Delta f$;
8. $\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u}) = -\Delta\mathbf{u} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$;
9. $\nabla \wedge [(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}] = (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\nabla \wedge \mathbf{u}) - [(\nabla \wedge \mathbf{u}) \cdot \nabla]\mathbf{u}$;
10. $(\nabla \wedge \mathbf{u}) \wedge \mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \frac{1}{2}\nabla|\mathbf{u}|^2$;
11. $\nabla \cdot (\mathbf{u} \circ \mathbf{v}) = {}^t[(\nabla\mathbf{u}) \circ \mathbf{v}] :: \nabla\mathbf{v}$;

A.2 PROPRIÉTÉ DE CONTINUATION DE LA MOYENNE

L'objectif de ce paragraphe est de prouver une propriété de translation de la moyenne des solutions du modèle Avv, donnée par le **théorème 3.3** : on rappelle que si Y est solution

de $\text{ABV}[Y^0, \psi, \Omega]$ sur l'intervalle $[0, \mathcal{T}]$, alors :

$$\mu(Y(t, \cdot)) := \mu_{Y^0, \psi, \Omega}(t) := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \frac{\int_{\Omega} Y^0(\mathbf{x}) \exp[\Psi(t)Y^0(\mathbf{x})] \, d\mathbf{x}}{\int_{\Omega} \exp[\Psi(t)Y^0(\mathbf{x})] \, d\mathbf{x}}.$$

Soit $\mathcal{T}_1 \in]0, \mathcal{T}[$ et considérons une solution \tilde{Y} de $\text{ABV}[Y^1, \psi_1, \Omega]$, où $Y^1(\mathbf{x}) = Y(\mathcal{T}_1, \mathbf{x})$ et $\psi_1(t) = \psi(\mathcal{T}_1 + t)$. Cette solution existe sur $[0, \mathcal{T} - \mathcal{T}_1]$ puisque $(t, \mathbf{x}) \mapsto Y(\mathcal{T}_1 + t, \mathbf{x})$ est par définition solution. La question que l'on soulève ici est de savoir si, pour $t \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}]$:

$$\mu_{Y^1, \psi_1, \Omega}(t) = \mu_{Y^0, \psi, \Omega}(\mathcal{T}_1 + t)? \quad (\text{A.1})$$

La réponse (positive) est apportée par le biais du flot caractéristique \mathcal{X} associé au champ de vitesse $\nabla\phi$. Ce flot établit une bijection de Ω dans lui-même entre l'instant initial et le temps \mathcal{T}_1 . Le jacobien de \mathcal{X} est donné par (2.7) :

$$\det \nabla_{x_0} \mathcal{X}(\mathcal{T}_1; 0, x_0) = \exp \left[\int_0^{\mathcal{T}_1} \Delta\phi(\tau, \mathcal{X}(\tau; 0, x_0)) \, d\tau \right].$$

On utilise alors l'équation de Poisson qui compose le modèle pour exprimer $\Delta\phi$ dans l'intégrale :

$$\begin{aligned} \det \nabla_{x_0} \mathcal{X}(\mathcal{T}_1; 0, x_0) &= \exp \left[\int_0^{\mathcal{T}_1} \psi(\tau) [Y(\tau, \mathcal{X}(\tau; 0, x_0)) - \mu_{Y^0, \psi, \Omega}(\tau)] \, d\tau \right]. \\ &= \frac{\exp[\Psi(\mathcal{T}_1)Y^0(x_0)]}{\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \exp[\Psi(\mathcal{T}_1)Y^0(\mathbf{y})] \, d\mathbf{y}}, \end{aligned}$$

d'après (3.13) et en remarquant que $Y(\tau, \mathcal{X}(\tau; 0, x_0)) = Y^0(x_0)$, quel que soit τ .

Revenons au problème (A.1). En appliquant le **théorème 3.3** à ce jeu de données, on a :

$$\mu_{Y^1, \psi_1, \Omega}(t) = \frac{\int_{\Omega} Y^1(\mathbf{x}) \exp[\Psi_1(t)Y^1(\mathbf{x})] \, d\mathbf{x}}{\int_{\Omega} \exp[\Psi_1(t)Y^1(\mathbf{x})] \, d\mathbf{x}}.$$

La fonction Ψ_1 désigne la primitive de ψ_1 qui s'annule en 0, *i.e.* donnée par : $\Psi_1(t) = \Psi(\mathcal{T}_1 + t) - \Psi(\mathcal{T}_1)$. De plus, en remontant les courbes caractéristiques, on peut remplacer dans la formule précédente $Y^1(\mathbf{x})$ par $Y^0(\mathcal{X}(0; \mathcal{T}_1, \mathbf{x}))$. Par le changement de variables $\mathbf{y} = \mathcal{X}(0; \mathcal{T}_1, \mathbf{x})$ (soit $\mathbf{x} = \mathcal{X}(\mathcal{T}_1; 0, \mathbf{y})$ d'après les propriétés du flot) dans les deux intégrales de la moyenne, il vient d'après le calcul du jacobien effectué ci-dessus :

$$\mu_{Y^1, \psi_1, \Omega}(t) = \frac{\int_{\Omega} Y^0(\mathbf{y}) \exp[(\Psi_1(t) + \Psi(\mathcal{T}_1))Y^0(\mathbf{y})] \, d\mathbf{y}}{\int_{\Omega} \exp[(\Psi_1(t) + \Psi(\mathcal{T}_1))Y^0(\mathbf{y})] \, d\mathbf{y}} = \mu_{Y^0, \psi, \Omega}(\mathcal{T}_1 + t).$$

Ainsi, l'égalité (A.1) est vérifiée, ce qui signifie que, lorsque l'on prolonge une solution sur un nouvel intervalle de temps, la formule de la moyenne reste vraie pour la solution ainsi étendue et la donnée initiale du problème. De plus, on peut faire apparaître dans cette

formule la solution en tout temps :

$$\mu_{\gamma^0, \psi, \Omega}(t) = \frac{\int_{\Omega} \gamma(t', \mathbf{x}) \exp[(\Psi(t+t') - \Psi(t'))\gamma(t', \mathbf{x})] \, d\mathbf{x}}{\int_{\Omega} \exp[(\Psi(t+t') - \Psi(t'))\gamma(t', \mathbf{x})] \, d\mathbf{x}}.$$

QUELQUES DÉTAILS DE CALCULS THERMODYNAMIQUES

On redonne ici quelques indications sur les transitions entre les différentes formulations des équations de Navier-Stokes, et en particulier la démonstration de l'expression de la vitesse du son dans l'égalité (1.12). Pour plus de détails sur la thermodynamique en général, se référer par exemple à Greiner *et al.* [43]. On pourra également se reporter aux travaux de Faccanoni [39] pour plus de précisions sur les couples de paramètres admissibles et les changements de variables thermodynamiques.

Dans la suite, toutes les variables sont supposées suffisamment régulières pour que les calculs soient valables.

B.1 FORMULATIONS DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES

On démontre dans ce paragraphe l'équivalence entre les systèmes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\rho Y_1) + \nabla \cdot (\rho Y_1 \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g}, \\ \partial_t(\rho E) + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{u}) = -\nabla \cdot (P \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{u}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}, \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{(B.1a)} \\ \text{(B.1b)} \\ \text{(B.1c)} \\ \text{(B.1d)} \end{array}$$

et :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_t Y_1 = 0, \\ \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \rho D_t \mathbf{u} = -\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g}, \\ \rho c_p D_t T = \alpha T D_t P + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \boldsymbol{\sigma} :: \nabla \mathbf{u}, \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{(B.2a)} \\ \text{(B.2b)} \\ \text{(B.2c)} \\ \text{(B.2d)} \end{array}$$

avec $E = \varepsilon + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}$, $D_t = \partial_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)$, $\alpha = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P$, $c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_P$ et $h = \varepsilon + \frac{P}{\rho}$.

On a choisi de prendre comme variables d'état le couple (T, P) . Pour pouvoir effectuer les changements de variables associés, on introduit le potentiel de Gibbs (ou encore enthalpie libre) :

$$\mathcal{G} = \varepsilon + T\mathcal{S} + \frac{P}{\rho},$$

l'entropie S ayant été introduite dans l'hypothèse 1, p. 15. En particulier, on a :

$$d\mathcal{G} = SdT + \frac{dP}{\rho},$$

compte-tenu du second principe de la thermodynamique.

Pour établir le système (B.2) à partir de la forme conservative (B.1), on commence par remarquer que, quelle que soit la variable ζ , la quantité $\partial_t(\rho\zeta) + \nabla \cdot (\rho\zeta\mathbf{u})$ peut se simplifier en $\rho D_t\zeta$ en prenant en compte l'équation de conservation de la masse (B.1b). Le système conservatif se réécrit donc :

$$\begin{cases} \rho D_t Y_1 = 0, & \text{(B.3a)} \\ \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, & \text{(B.3b)} \\ \rho D_t \mathbf{u} = -\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g}, & \text{(B.3c)} \\ \rho D_t E = -\nabla \cdot (P\mathbf{u}) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{u}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}. & \text{(B.3d)} \end{cases}$$

On s'intéresse ensuite plus particulièrement à l'équation (B.3d). On y remplace E par son expression en fonction de ε et de \mathbf{u} . Le terme $D_t \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}$ se développe en : $\mathbf{u} \cdot D_t \mathbf{u}$. D'où, en soustrayant à (B.3d) l'équation (B.3c) dont on a pris le produit scalaire par \mathbf{u} , il reste :

$$\rho D_t \varepsilon = -P \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \boldsymbol{\sigma} :: \nabla \mathbf{u}. \quad \text{(B.4)}$$

En remplaçant dans (B.4) ε par $h - \frac{P}{\rho}$, il vient :

$$\rho D_t h = D_t P - \frac{P}{\rho} D_t \rho - P \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \boldsymbol{\sigma} :: \nabla \mathbf{u}.$$

En remarquant que $-\frac{P}{\rho} D_t \rho - P \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{-P}{\rho} [D_t \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u}] = 0$, on obtient :

$$\rho D_t h = D_t P \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \boldsymbol{\sigma} :: \nabla \mathbf{u}. \quad \text{(B.5)}$$

La dernière étape menant à (B.2d) repose sur des calculs formels. Comme h dépend (de manière régulière) de Y_1 , T et P , on peut écrire :

$$\rho D_t h = \rho \frac{\partial h}{\partial Y_1} D_t Y_1 + \rho \frac{\partial h}{\partial T} D_t T + \rho \frac{\partial h}{\partial P} D_t P.$$

Dans le second membre, le premier terme est nul d'après (B.3a), tandis que le second s'écrit $\rho c_p D_t T$. Reste à traiter le dernier terme. En partant de la définition de h , on a :

$$\frac{\partial h}{\partial P} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial P} + \frac{1}{\rho} - \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial h}{\partial P}.$$

Or, du second principe de la thermodynamique, on déduit :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial P} = -T \frac{\partial S}{\partial P} + \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial h}{\partial P}.$$

D'où :

$$\frac{\partial h}{\partial P} = -T \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial P} + \frac{1}{\rho}.$$

En utilisant les relations de *Maxwell* (équivalent du lemme de *Schwarz* sur la permutation des dérivées secondes) appliquées au potentiel \mathcal{G} , on a :

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial P} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial T} = \frac{\alpha}{\rho}.$$

D'où :

$$\frac{\partial h}{\partial P} = \frac{-\alpha T}{\rho} + \frac{1}{\rho}.$$

En injectant cette dernière égalité dans (B.5), on obtient (B.2d).

B.2 CALCUL DU SECOND MEMBRE DE L'ÉQUATION DE POISSON

L'analyse contenue dans ce mémoire est en partie basée sur la réécriture de l'équation de conservation de la masse sous la forme :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \mathcal{G}_\theta := \frac{-D_t \rho}{\rho}.$$

Une des conséquences est que l'on ne considère plus ρ comme une variable d'état (il n'y a plus de dérivées de ρ explicitement dans le système), mais comme une fonction des variables Y_1, T, P . On établit dans la suite une nouvelle expression de \mathcal{G}_θ . En tenant compte des considérations précédentes, on écrit :

$$D_t \rho = \frac{\partial \rho}{\partial Y_1} D_t Y_1 + \frac{\partial \rho}{\partial T} D_t T + \frac{\partial \rho}{\partial P} D_t P.$$

On remplace alors $\frac{\partial \rho}{\partial T}$ par $-\alpha \rho$, puis $D_t T$ par son expression tirée de (B.2d), ce qui donne finalement :

$$\mathcal{G}_\theta = -\frac{D_t P}{\rho} \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T - \frac{\alpha^2 T}{c_p} \right] + \frac{\beta}{P} (\nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \sigma :: \nabla \mathbf{u}),$$

où on a noté $\beta = \frac{\alpha P}{\rho c_p}$. Il reste alors à interpréter le coefficient de $D_t P$. On peut montrer que la convexité de la variable \mathcal{S} assure la positivité de la première parenthèse. Ce nombre positif s'avère être lié à la vitesse du son, définie par :

$$c^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S.$$

La suite du raisonnement est basée sur des changements de variables. Pour éviter toute confusion, on introduit les notations suivantes : P lorsque la pression est considérée comme une variable d'état, \tilde{P} lorsque la pression est donnée par une loi d'état en (τ, ε) et $\tilde{\tilde{P}}$ lorsque la loi d'état est donnée en fonction de (τ, \mathcal{S}) , avec $\tau = \rho^{-1}$.

En tenant compte de ces notations, on a donc : $c^2 = -\tau^2 \left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tau} \right)_S$. On cherche à prouver la relation :

$$c^2 = \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T - \frac{\alpha^2 T}{c_p} \right]^{-1}. \quad (\text{B.6})$$

Comme le second membre est exprimé en variables (T, P) , on va effectuer les changements de variables thermodynamiques dans le membre de gauche pour se ramener au même couple de variables. Remarquons tout d'abord que l'on a :

$$c^2 = -\tau^2 \left[\left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tau} \right)_\varepsilon (\tau, \varepsilon) + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right)_S (\tau, S) \left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \varepsilon} \right)_\tau (\tau, \varepsilon) \right].$$

Compte-tenu du second principe de la thermodynamique, on a : $\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right)_S (\tau, S) = -P$. Par ailleurs, en dérivant la relation $\tilde{P}(\tau(T, P), \varepsilon(T, P)) = P$ par rapport à T et P , on obtient, par inversion du système linéaire :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tau} \right)_\varepsilon = - \frac{\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)_P}{\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial P} \right)_T \left(\frac{\partial \tau}{\partial T} \right)_P - \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)_P \left(\frac{\partial \tau}{\partial P} \right)_T}, \\ \left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \varepsilon} \right)_\tau = \frac{\left(\frac{\partial \tau}{\partial T} \right)_P}{\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial P} \right)_T \left(\frac{\partial \tau}{\partial T} \right)_P - \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)_P \left(\frac{\partial \tau}{\partial P} \right)_T}. \end{cases}$$

D'où :

$$c^2 = \tau^2 \frac{\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)_P + P \left(\frac{\partial \tau}{\partial T} \right)_P}{\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial P} \right)_T \left(\frac{\partial \tau}{\partial T} \right)_P - \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)_P \left(\frac{\partial \tau}{\partial P} \right)_T}. \quad (\text{B.7})$$

On s'intéresse ensuite au second membre de (B.6). On a :

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T = -\tau^2 \left(\frac{\partial \tau}{\partial P} \right)_T.$$

D'autre part, en dérivant la première loi par rapport à P , il vient :

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial P} \right)_T + P \left(\frac{\partial \tau}{\partial P} \right)_T = -T \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T = -T \left(\frac{\partial \tau}{\partial T} \right)_P = -\alpha \tau T,$$

par les relations de *Maxwell*. De même :

$$c_p = \left(\frac{\partial}{\partial T} \right)_P (\varepsilon + P\tau) = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)_P + P \left(\frac{\partial \tau}{\partial T} \right)_P.$$

En combinant ces trois égalités, on aboutit à (B.7), ce qui achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ALAZARD, T. (2006). Low Mach number flows and combustion. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, 38(4):1186–1213. (Cité à la page 2.)
- [2] ANTHONISSEN, M. (2001). *Local Defect Correction Techniques: Analysis and Application to Combustion*. Thèse de doctorat, Eindhoven University of Technology. (Cité à la page 170.)
- [3] BALL, J. (1977). Remarks on blow-up and nonexistence theorems for nonlinear evolution equations. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 28(4):473. (Cité à la page 84.)
- [4] BARDOS, C. Bercovier, M. et PIRONNEAU, O. (1980). The vortex method with finite elements. *Rapport INRIA*, 15. (Cité aux pages 129 et 130.)
- [5] BEALE, J., KATO, T. et MAJDA, A. (1984). Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations. *Communications in Mathematical Physics*, 94:61–66. (Cité à la page 84.)
- [6] BERGER, M. et COLELLA, P. (1989). Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 82(1):64–84. (Cité à la page 166.)
- [7] BERGER, M. et OLIGER, J. (1984). Adaptive methods for hyperbolic partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 53:484–512. (Cité à la page 166.)
- [8] BERGER, M. et RIGOUTSOS, I. (1991). An Algorithm for Point Clustering and Grid Generation. *IEEE Transactions in Systems, Man, and Cybernetics*, 21(5):1278–1286. (Cité à la page 166.)
- [9] BONOMETTI, T. et MAGNAUDET, J. (2007). An interface-capturing method for incompressible two-phase flows. Validation and application to bubble dynamics. *International Journal of Multiphase Flow*, 33(2):109–133. (Cité à la page 211.)
- [10] BOURGUIGNON, J.-P. et BREZIS, H. (1974). Remarks on the Euler equation. *Journal of Functional Analysis*, 15:341–363. (Cité aux pages 40 et 84.)
- [11] BOYER, F. et FABRIE, P. (2005). *Eléments d'analyse pour l'étude de quelques modèles d'écoulements de fluides visqueux incompressibles*. Springer-Verlag. (Cité aux pages 12, 30, 39, 55, 89 et 92.)
- [12] BURGERS, J. (1948). A mathematical model illustrating the theory of turbulence. *Adv. Appl. Mech.*, 1:171–199. (Cité aux pages 39 et 134.)
- [13] CHAVANIS, P.-H., ROSIER, C. et SIRE, C. (2002). Thermodynamics of self-gravitating systems. *Physical Review E*, 66(3):036105. (Cité à la page 74.)

- [14] CHEMIN, J.-Y. et LERNER, N. (1995). Flot de champs de vecteurs non lipschitziens et équations de Navier-Stokes. *Journal of Differential Equations*, 121(2):314–328. (Cité à la page 40.)
- [15] CHORIN, A. et MARSDEN, J. (1979). *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. Springer-Verlag. (Cité aux pages 12, 23 et 38.)
- [16] CHUEH, K., CONLEY, C. et SMOLLER, J. (1977). Positively invariant regions for systems of nonlinear diffusion equations. *Indiana University Mathematics Journal*, 26(2):373–392. (Cité à la page 68.)
- [17] CODDINGTON, E. et LEVINSON, N. (1972). *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill. (Cité à la page 38.)
- [18] COIRIER, W. (1994). *An adaptively-refined, cartesian, cell-based scheme for the Euler and Navier-Stokes equations*. Thèse de doctorat, University of Michigan. (Cité à la page 166.)
- [19] CONSTANTIN, P. (1986). Note on loss of regularity for solutions of the 3D incompressible Euler and related equations. *Communications in Mathematical Physics*, 104:311–326. (Cité à la page 84.)
- [20] CONSTANTIN, P. (2007). On the Euler equations of incompressible fluids. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 44(4):603–621. (Cité à la page 84.)
- [21] COURANT, R. et HILBERT, D. (1953). *Methods of Mathematical Physics I*. (Cité aux pages 19 et 55.)
- [22] DANCHIN, R. (2005). Low Mach number limit for viscous compressible flows. *ESAIM:M2AN*, 39(3):459–475. (Cité à la page 2.)
- [23] DE LELLIS, C. (2007). Ordinary differential equations with rough coefficients and the renormalization theorem of Ambrosio. *Séminaire Bourbaki*. (Cité aux pages 40 et 46.)
- [24] DELLACHERIE, S. (2005). On a diphasic low mach number system. *ESAIM:M2AN*, 39(3):487–514. (Cité aux pages 2, 4, 12, 15, 17, 20, 25 et 208.)
- [25] DELLACHERIE, S. (2007). Numerical resolution of a potential diphasic low Mach number system. *Journal of Computational Physics*, 223(1):151–187. (Cité aux pages 2, 4, 12, 22, 23 et 25.)
- [26] DELLACHERIE, S. (2010). Analysis of Godunov type schemes applied to the compressible Euler system at low Mach number. *Journal of Computational Physics*, 229(4):978–1016. (Cité à la page 2.)
- [27] DELLACHERIE, S. et LAFITTE, O. (2005). Existence et unicité d’une solution classique à un modèle abstrait de vibration de bulles de type hyperbolique - elliptique. *Publication du Centre de Recherches Mathématiques de Montréal (Canada)*, CRM-3200. (Cité aux pages 5, 12, 23, 32, 41, 42, 76, 77, 78, 97 et 201.)
- [28] DESJARDINS, B., GRENIER, E. et LIONS, P.L. anMasmoudi, N. (1999). Incompressible limit for solutions of the isentropic Navier-Stokes equations with Dirichlet boundary conditions. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 78(5):461–471. (Cité à la page 2.)

- [29] DESPRÉS, B. et LAGOUTIÈRE, F. (2001). Contact Discontinuity Capturing Schemes for Linear Advection and Compressible Gas Dynamics. *Journal of Scientific Computing*, 16(4): 479–524. (Cité à la page 127.)
- [30] DIPERNA, R. et LIONS, P. (1989). Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces. *Inventiones mathematicae*, 98(3):511–547. (Cité aux pages 46 et 92.)
- [31] DOUGLAS JR., J., HUANG, C.-S. et PEREIRA, F. (1999). The modified method of characteristics with adjusted advection. *Numerische Mathematik*, 83:353–369. (Cité à la page 130.)
- [32] DOUGLAS JR., J. et RUSSEL, T. (1982). Numerical methods for convection-dominated diffusion problems based on combining the method of characteristics with finite element or finite difference procedures. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 19:871–885. (Cité à la page 130.)
- [33] EGOROV, Y. et SHUBIN, M. (1992). *Partial Differential Equations I*. Springer-Verlag. (Cité à la page 28.)
- [34] EL-AMRANI, M. et SEAID, M. (2008). A finite element modified method of characteristics for convection heat transport. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 24(3):776–798. (Cité à la page 131.)
- [35] EMBID, P. (1984). *Well-posedness of the nonlinear equations for zero Mach number combustion*. Thèse de doctorat, Univ. Calif. Berkeley. (Cité aux pages 41, 42, 61, 65, 70 et 207.)
- [36] EMBID, P. (1987). Well-Posedness of the nonlinear Equations for zero Mach Number Combustion. *Communications in Partial Differential Equations*, 12(11):1227–1283. (Cité aux pages 4, 35, 47, 48, 55, 57, 59, 61, 66, 196 et 201.)
- [37] ESCHER, J. et SIMONETT, G. (1998). The volume preserving mean curvature flow near spheres. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 126(9):2789–2796. (Cité à la page 211.)
- [38] EVANS, L. et GARIEPY, R. (1992). *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. CRC Press. (Cité à la page 113.)
- [39] FACCANONI, G. (2008). *Étude d'un modèle fin de changement de phase liquide-vapeur. Contribution à l'étude de la crise d'ébullition*. Thèse de doctorat, École Polytechnique. (Cité aux pages 211 et 217.)
- [40] FOURESTEY, G. (2002). *Simulation numérique et contrôle optimal d'interactions fluide incompressible / structure par une méthode de Lagrange-Galerkin d'ordre 2*. Thèse de doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées. (Cité aux pages 130 et 131.)
- [41] GILBARG, D. et TRUDINGER, N. (2001). *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer-Verlag. (Cité à la page 46.)
- [42] GODLEWSKI, E. et RAVIART, P.-A. (1996). *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*. Springer-Verlag. (Cité à la page 38.)

- [43] GREINER, W., NEISE, L. et STÖCKER, H. (1995). *Thermodynamics and statistical mechanics*. Springer. (Cité à la page 217.)
- [44] GUEYFFIER, D., LI, J., NADIM, A., SCARDOVELLI, R. et ZALESKI, S. (1999). Volume-of-fluid interface tracking with smoothed surface stress methods for three-dimensional flows. *Journal of Computational Physics*, 152(2):423–456. (Cité à la page 126.)
- [45] GUILLARD, H. et VIOZAT, C. (1999). On the behaviour of upwind schemes in the low Mach number limit. *Computers and Fluids*, 28(1):63–86. (Cité à la page 2.)
- [46] HACKBUSH, W. (1984). Local defect correction and domain decomposition techniques. *Defect Correction Methods. Theory and Applications, Computing*, 5:89–113. (Cité à la page 170.)
- [47] HARLOW, F. et WELSH, E. (1965). Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow with free surface. *Physics of Fluids*, 8. (Cité aux pages 125, 126 et 171.)
- [48] HELFFER, B. et LAFITTE, O. (2007). The semiclassical regime for ablation front models. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 183:371–409. (Cité à la page 74.)
- [49] HOLLY, F. et PREISSMANN, A. (1977). Accurate calculation of transport in two dimensions. *Journal of the Hydraulics Division*, 103(11):1259–1277. (Cité aux pages 131 et 137.)
- [50] HURT, C. et NICHOLS, B. (1981). Volume-of-Fluid (VOF). Method for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computational Physics*, 39:201–225. (Cité aux pages 125 et 126.)
- [51] JOUHAUD, J.-C. (1997). *Méthode d'Adaptation de Maillages Structurés par Enrichissement*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux. (Cité à la page 167.)
- [52] KAAZEMPUR-MOFRAD, M. et ETHIER, C. (2002). An efficient characteristic Galerkin scheme for the advection equation in 3-D. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(46):5345–5363. (Cité à la page 131.)
- [53] KATO, T. (1967). On classical solutions of the two-dimensional non-stationary Euler equation. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 25(3):188–200. (Cité à la page 84.)
- [54] KLAINERMAN, S. et MAJDA, A. (1981). Singular limits of quasilinear hyperbolic systems with large parameters and the incompressible limit of compressible fluids. *Communications on pure and applied Mathematics*, 34(4):481–524. (Cité à la page 2.)
- [55] KLAINERMANN, S. et MAJDA, A. (1982). Compressible and incompressible fluids. *Communications on pure and applied Mathematics*, 35:629–651. (Cité aux pages 2 et 34.)
- [56] LAGOUTIÈRE, F. (2000). *Modélisation mathématique et résolution numérique de problèmes de fluides à plusieurs constituants*. Thèse de doctorat, Paris-6 University. (Cité à la page 127.)
- [57] LAKEHAL, D., MEIER, M. et FULGOSI, M. (2002). Interface tracking towards the direct simulation of heat and mass transfer in multiphase flows. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 23:242–257. (Cité à la page 211.)

- [58] LEVEQUE, R. (1992). *Numerical Methods for Conservation Laws*. Birkhäuser Verlag. (Cité aux pages 129, 139, 144 et 159.)
- [59] MAJDA, A. et SETHIAN, J. (1985). The derivation and numerical solution of the equations for zero mach number combustion. *Combustion Science and Technology*, 42:185–205. (Cité aux pages 1, 16 et 61.)
- [60] MEKKAS, A. (2008). Résolution numérique d'un modèle de vibration de bulle abstraite. Mémoire de D.E.A., SupGalilée, Université Paris 13. (Cité à la page 164.)
- [61] MOSER, J. (1966). A rapidly convergent iteration method and nonlinear differential equations. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, 20:265–315. (Cité aux pages 32 et 34.)
- [62] NOH, W. et WOODWARD, P. (1976). SLIC (simple line interface calculation). pages 330–340. (Cité à la page 125.)
- [63] OSHER, S. et SETHIAN, J. (1988). Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79:12–49. (Cité aux pages 126 et 129.)
- [64] PARKER, B. et YOUNGS, D. (1992). Two and three dimensional Eulerian simulation of fluid flow with material interfaces. *Atomic Weapons Establishment technical report*. (Cité à la page 126.)
- [65] PENEL, Y. (2010). An explicit stable numerical scheme for the 1D transport equation. *Soumis*. (Cité à la page 151.)
- [66] PENEL, Y., DELLACHERIE, S. et LAFITTE, O. (2010a). Global solutions to the 1D Abstract Bubble Vibration model. *Soumis*. (Cité à la page 119.)
- [67] PENEL, Y., DELLACHERIE, S. et LAFITTE, O. (2010b). Theoretical study of an abstract bubble vibration model. *Soumis*. (Cité à la page 76.)
- [68] PENEL, Y., MEKKAS, A., DELLACHERIE, S., RYAN, J. et BORREL, M. (2009). Application of an AMR Strategy to an abstract Bubble Vibration Model. *19th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference Proceedings*. (Cité à la page 164.)
- [69] PERTHAME, B. (2004). PDE models for chemotactic movements. *Applications of Mathematics*, 49(6):539–564. (Cité à la page 74.)
- [70] PERTHAME, B. et DALIBARD, A. (2009). Existence of solutions of the hyperbolic Keller-Segel model. *American Mathematical Society*, 361(5):2319–2335. (Cité à la page 121.)
- [71] PIRONNEAU, O. (1982). On the transport-diffusion algorithm and its applications to the Navier-Stokes equations. *Numerische Mathematik*, 38:309–332. (Cité aux pages 131, 140 et 141.)
- [72] PONCE, G. (1985). Remarks on a paper by J.T. Beale, T. Kato and A. Majda. *Communications in Mathematical Physics*, 98:349–353. (Cité à la page 84.)

- [73] PUCKETT, E., ALMGREN, A., BELL, J., MARCUS, D. et RIDER, W. (1997). A High-Order Projection Method for Tracking Fluid Interfaces in Variable Density Incompressible Flows. *Journal of Computational Physics*, 130(2):269–282. (Cité à la page 126.)
- [74] QUIRK, J. (1991). *An Adaptive Grid Algorithm for Computational Shock Hydrodynamics*. Thèse de doctorat, College of Aeronautics, Cranfield University, Bedford, UK. (Cité à la page 166.)
- [75] RIDER, W. et KOTHE, D. (1998). Reconstructing volume tracking. *Journal of Computational Physics*, 141(2):112–152. (Cité aux pages 126 et 164.)
- [76] ROSIER, C. (2001). Problème de Cauchy pour une équation parabolique modélisant la relaxation des systèmes stellaires auto-gravitants. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 332(1):903–908. (Cité à la page 74.)
- [77] ROWLINSON, J. et WIDOM, B. (1982). *Molecular Theory of Capillarity*. Oxford Univ. Press. (Cité à la page 184.)
- [78] RYAN, J. et BORREL, M. (2004). Adaptive Mesh Refinement: a coupling Framework for Direct Numerical Simulation of reacting Gas Flow. *Institute for Computational Fluid Dynamics*. (Cité à la page 167.)
- [79] SCARDOVELLI, R. et ZALESKI, S. (1999). Direct numerical simulation of free-surface and interfacial flow. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 31(1):567–603. (Cité à la page 126.)
- [80] SCHOCHET, S. (1994). Fast singular limits of hyperbolic PDEs. *Journal of Differential Equations*, 114:476–512. (Cité à la page 2.)
- [81] SMOLLER, J. (1983). *Shock waves and reaction-diffusion equations*. Springer-Verlag New York. (Cité aux pages 68 et 69.)
- [82] SOUPLET, P. et WEISSLER, F. (1997). Self-similar subsolutions and blowup for nonlinear parabolic equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 212:60–74. (Cité à la page 84.)
- [83] STANIFORTH, A. et CÔTÉ, J. (1991). Semi-Lagrangian integration schemes for atmospheric models—a review. *Monthly Weather Review*, 119(9):2206–2223. (Cité à la page 131.)
- [84] SUSSMAN, M. (2003). A second order coupled level set and volume-of-fluid method for computing growth and collapse of vapor bubbles. *Journal of Computational Physics*, 187(1):110–136. (Cité à la page 126.)
- [85] SÜLLI, E. (1988). Convergence and nonlinear stability of the Lagrange-Galerkin method for the Navier-Stokes equations. *Numerische Mathematik*, 53(4):459–483. (Cité à la page 131.)
- [86] TEMAM, R. (1975). On the Euler equations of incompressible perfect fluids. *Journal of Functional Analysis*, 20(1):32–43. (Cité à la page 84.)
- [87] TRYGGVASON, G., BUNNER, B., ESMAEELI, A., JURIC, D., AL-RAWAHI, N., TAUBER, W., HAN, J., NAS, S. et JAN, Y. (2001). A front-tracking method for the computations of multiphase flow. *Journal of Computational Physics*, 169(2):708–759. (Cité à la page 125.)

- [88] UNVERDI, S. et TRYGGVASON, G. (1992). A front-tracking method for viscous incompressible flows. *Journal of Computational Physics*, 100:25–37. (Cité à la page 125.)
- [89] YOUNGS, D. (1982). Time-dependent multi-material flow with large fluid distortion. *Numerical methods for fluid dynamics*, 1(1):41–51. (Cité à la page 126.)
- [90] ZALESAK, S. (1979). Fully multidimensional flux-corrected transport algorithms for fluids. *Journal of Computational Physics*, 31(3):335–362. (Cité à la page 74.)

Titre Étude théorique et numérique de la déformation d'une interface séparant deux fluides non-miscibles à bas nombre de Mach

Résumé L'objectif de cette thèse est d'étudier un système modélisant l'évolution d'écoulements bi-fluides non miscibles dans un domaine borné, avec la perspective de mieux comprendre et de prédire le comportement de bulles dans les cœurs de réacteurs nucléaires. Ce système, appelé DLMN, est construit à partir des équations de Navier-Stokes sous l'hypothèse d'un nombre de Mach très faible. Dans le cadre d'études préliminaires, on établit des résultats d'existence et d'unicité de solutions pour des données initiales régulières (de type Sobolev) et pour différents systèmes d'équations aux dérivées partielles non-linéaires couplant équations hyperboliques, paraboliques et elliptiques. En particulier, dans le cas du modèle abstrait de vibration de bulles (ABV), on établit un certain nombre de propriétés vérifiées par les solutions, lesquelles sont explicitées en dimension 1. On s'attache ensuite à simuler ces solutions, en utilisant des schémas adaptés à la régularité des données. Pour le cas des données régulières, on construit un schéma d'ordre 2 inconditionnellement stable et basé sur la méthode des caractéristiques. En revanche, en présence de discontinuités, on associe un schéma non diffusif à un algorithme de raffinement adaptatif de maillage.

Mots-clés modélisation de systèmes diphasiques, solutions classiques d'EDPs non-linéaires, temps d'existence, faible nombre de Mach, méthode des caractéristiques, schémas numériques pour l'équation de transport, DLMN, ABV

Title Theoretical and numerical study of a moving interface between two immiscible fluids at a low Mach number

Abstract We aimed at studying non-miscible two-fluid flows in a bounded domain in order to better understand and to predict the overall process of bubbly flows in nuclear reactors. A system of PDEs has been derived from the Navier-Stokes equations under a low Mach number assumption and named DLMN. As a preliminary, we prove in this thesis existence and uniqueness results for two sets of PDEs endowed with smooth initial data (Sobolev spaces) and consisting of hyperbolic, parabolic and elliptic equations. In particular, we deal with an abstract bubble vibration model (ABV). In addition to the proof of the short time existence result, we show that there exist global solutions in dimension 1 no matter what smooth initial data. We also demonstrate several properties satisfied by potential solutions. We then carry out numerical simulations by means of an unconditionally stable second-order scheme based on the method of characteristics (for smooth solutions) or a coupling between an antidiffusive scheme and an adaptive mesh refinement algorithm (in case of discontinuities).

Keywords modelling of diphasic flows, classical solutions of nonlinear PDEs, time of existence, low Mach number, method of characteristics, numerical schemes for transport equations, DLMN, ABV