TP n^{o}2 : l'algorithme de Cholesky

Les codes et le rapport sont à rendre pour le mercredi 30 décembre 2009, 23h59.

On s'intéresse dans ce TP à la résolution du système linéaire $Ax = b$, où A est une matrice **symétrique définie positive** d'ordre n donnée et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$ donné. Pour cela, on utilise le résultat suivant :

Théorème 1 *Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Alors il existe une unique matrice triangulaire supérieure S telle que $A = {}^tSS$.*

1. En écrivant l'égalité $A = {}^tSS$ coefficient par coefficient, écrire un algorithme de calcul de S.
2. Évaluer le nombre d'opérations élémentaires de cet algorithme.
3. Implémenter cet algorithme ainsi que les étapes de descente et de remontée correspondant à la résolution de systèmes respectivement triangulaire inférieur et triangulaire supérieur.
4. Tester le tout sur la matrice du Laplacien (de coefficients diagonaux égaux à 2, sur- et sous-diagonaux égaux à -1).
5. Adapter l'algorithme lorsque la matrice et le vecteur sont fournis dans des fichiers textes avec un stockage de la matrice :
   (a) par lignes ;
   (b) par colonnes ;
   (c) par diagonales.
   Des fichers de stockage de matrice seront fournis au cours du TP.
6. On considère la matrice H_n de coefficients $(H_n)_{i,j} = \dfrac{1}{i+j-1}$.
   (a) *Exprimer les coefficients de H_n à l'aide d'intégrales. En déduire que H_n est symétrique définie positive.*
   (b) Soit $S_n \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $H_n = {}^tS_nS_n$. *En écrivant l'algorithme de Cholesky, exprimer les coefficients de S_n à l'aide de ceux de S_{n-1}.* On trouve :
   $$(S_n)_{ij} = \frac{\sqrt{2j-1}\ [(i-1)!]^2}{(i-j)!\,(i+j-1)!}.$$
   (c) On souhaite montrer dans cette question que $(H_n)^{-1}$ est à coefficients entiers. Pour cela, on introduit les polynômes d'interpolation de Lagrange (L_i) aux points $1, 2, \ldots, n$. Pour $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, on cherche à déterminer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que :
   $$H_n\mathbf{x} = \mathbf{y}. \tag{1}$$
      i. Soit F la fraction rationnelle $F = \dfrac{P}{Q} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{X+j-1}$, où $Q = \displaystyle\prod_{j=1}^{n}(X+j-1)$ et $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ est solution de (1). *Exprimer $P(i)$ en fonction de $Q(i)$ et de $\mathbf{y}$.*
      ii. *Calculer $Q(i)$ et en déduire une expression de $P(i)$, puis de P en le décomposant sur la base de Lagrange.*
      iii. *Calculer $P(1-j)$ et $Q'(1-j)$ pour $j \in \{1, \ldots, n\}$.*
      iv. *Décomposer F en éléments simples.*
      v. *Identifier alors x_j puis conclure.*
   (d) Comparer les résultats donnés par l'algorithme de Cholesky avec ceux donnés par la question précédente ainsi que par la fonction inverse de MATLAB. On s'intéressera à la taille n du système.