Université Paris 13, École d'Ingénieurs SupGalilée
Formation Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique (MACS)
Année 1, Semestre 2
Liste d'exercices

Renfort en Analyse et Analyse Numérique

Yohan Penel

Villetaneuse, le 29 janvier 2009

1 Problème : noyaux de polynômes orthogonaux

Soit ω une fonction poids sur un intervalle I ***borné*** *de $\mathbb{R}$. On note dans tout l'exercice, pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé :*

- *$(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes orthogonaux* ***unitaires*** *associés à l'espace $L^2_\omega(I)$;*
- *S_n la projection orthogonale au sens du produit scalaire de $L^2_\omega(I)$ sur $\mathbb{R}_n[X]$;*
- *pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:*

$$K_k : (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y \longmapsto \frac{1}{\|P_k\|^2_\omega} \frac{P_{k+1}(y)P_k(x) - P_{k+1}(x)P_k(y)}{y-x}.$$

1. Quelques rappels de cours : *on donnera les réponses sans justification.*
   (a) Rappeler la définition de $L^2_\omega(I)$.
   (b) Donner la solution du problème $\inf\limits_{Q\in\mathbb{R}_n[X]} \|f-Q\|_\omega$ pour tout $f \in L^2_\omega(I)$ à l'aide de S_n.
   (c) Rappeler l'expression de $S_n(f)$ en fonction des polynômes (P_k) pour $f \in L^2_\omega(I)$. Idem pour $\|S_n(f)\|^2_\omega$.
   (d) Que vaut $S_n(P)$ pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$?
2. Exprimer P_0 puis P_1 en fonction de ω.
3. Montrer que l'application K_n est continue sur $\mathbb{R}^2$ avec :

$$K_n(x,x) = \frac{P'_{n+1}(x)P_n(x) - P_{n+1}(x)P'_n(x)}{\|P_n\|^2_\omega}.$$

4. On pose $Q_n = P_{n+1} - XP_n$.
   (a) Que vaut $S_n(Q_n)$ en fonction de Q_n ?
   (b) Justifier que $\langle XP_n, P_k\rangle_\omega = 0$ pour $k \leqslant n-2$ et $\langle XP_n, P_{n-1}\rangle_\omega = \|P_n\|^2_\omega$.
   (c) Déterminer à partir des deux questions précédentes une expression de Q_n en fonction de P_n et de P_{n-1}.
   (d) En déduire que : $K_n(x,y) = \dfrac{P_n(x)P_n(y)}{\|P_n\|^2_\omega} + K_{n-1}(x,y)$.
   (e) Prouver la formule de Christoffel-Darboux :

$$K_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_k(x)P_k(y)}{\|P_k\|^2_\omega}.$$

5. Déduire des questions précédentes que l'on a la relation :

$$\forall\, f \in L^2_\omega(I),\ S_n(f)(x) = \langle K_n(x,\cdot), f\rangle_\omega .$$

6. *On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes unitaires de degré exactement n et $\mathcal{Q}_n$ l'ensemble des polynômes de norme 1 et de degré exactement n.*
   (a) $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{Q}_n$ sont-ils des espaces vectoriels ? Justifier.
   (b) Montrer que $\inf\limits_{Q\in\mathcal{P}_n} \|Q\|_\omega = \dfrac{|\langle X^n, P_n\rangle_\omega|}{\|P_n\|_\omega} = \sqrt{|\langle X^n, P_n\rangle_\omega|}$. *On pourra utiliser les questions 1c et 1d.*
   (c) A l'aide des questions 1d. et 5., prouver que :

$$\forall\, x \in I,\ \sup_{Q\in\mathcal{Q}_n} |Q(x)| = \|K_n(x,\cdot)\|_\omega = \sqrt{K_n(x,x)}\,.$$

2 Problème : matrices de Hilbert

n désigne un entier naturel non nul. On appelle matrice de Hilbert d'ordre n la matrice H_n de coefficients $(H_n)_{i,j} = \dfrac{1}{i+j-1}$. On s'intéresse dans la suite à certaines propriétés de ces matrices, auxquelles on applique certains algorithmes de résolution de systèmes linéaires.

1. On note $h_n = \det(H_n)$. *Après avoir simplifié les expressions* $\dfrac{1}{i+j-1} - \dfrac{1}{n+j-1}$ *et* $\dfrac{1}{i+j-1} - \dfrac{1}{n+i-1}$, *prouver la relation de récurrence :*

$$h_n = \frac{(n-1)!^4}{(2n-1)!^2} h_{n-1}.$$

   En déduire l'expression de h_n en fonction de n.

2. *Exprimer les coefficients de H_n à l'aide d'intégrales. En déduire que H_n est symétrique définie positive.*
3. *H_n admet-elle une décomposition LU ? de Cholesky ?*
4. Soit $C_n \in T_n^+(\mathbb{R})$ telle que $H_n = C_n \cdot {}^tC_n$. *En écrivant l'algorithme de Cholesky, exprimer les coefficients de C_n à l'aide de ceux de C_{n-1}.* On trouve :

$$(C_n)_{ij} = \frac{\sqrt{2j-1}\ [(i-1)!]^2}{(i-j)!\,(i+j-1)!}.$$

5. On s'intéresse dans la suite à la matrice $H = H_2$.
   (a) *Déterminer h_2, H^{-1} et $\rho(H)$.*
   (b) *Déterminer les décompositions LU et de Cholesky de H.*
   (c) *Étudier la convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel pour la résolution du sysyème $H\mathbf{x} = \mathbf{y}$ avec $\mathbf{y}$ donné dans $\mathbb{R}^2$.*
   (d) *Quel résultat du cours retrouve-t-on ?*
6. On souhaite montrer dans cette question que $(H_n)^{-1}$ est à coefficients entiers. Pour cela, on introduit les polynômes d'interpolation de Lagrange (L_i) aux points $1, 2, \ldots, n$. Pour $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, on cherche à déterminer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$H_n\mathbf{x} = \mathbf{y}. \tag{1}$$

   (a) Soit F la fraction rationnelle $F = \dfrac{P}{Q} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{X+j-1}$, où $Q = \displaystyle\prod_{j=1}^{n}(X+j-1)$ et $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ est solution de (1). *Exprimer $P(i)$ en fonction de $Q(i)$ et de $\mathbf{y}$.*
   (b) *Calculer $Q(i)$ et en déduire une expression de $P(i)$, puis de P en le décomposant sur la base de Lagrange.*
   (c) *Calculer $P(1-j)$ et $Q(1-j)$ pour $j \in [\![1, n]\!]$.*
   (d) *Décomposer F en éléments simples.*
   (e) *Identifier alors x_j puis conclure.*
7. On représente sur les figures ci-dessous les graphes du déterminant h_n et du conditionnement pour la norme euclidienne de H_n en fonction de n. *Commenter.*

3 Examen : méthode de Cholesky

Soit A une matrice symétrique définie positive de taille n. On cherche à établir ici une nouvelle technique pour déterminer la décomposition de Cholesky $A = {}^tBB$ où B est une matrice triangulaire supérieure.

1. Montrer que les coefficients diagonaux de A sont strictement positifs.
2. On décompose A par blocs sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & {}^tv_1 \\ v_1 & \tilde{A}^{(1)} \end{pmatrix}$$

   où $\tilde{A}^{(1)}$ est une matrice de taille $n-1$. Vérifier alors qu'on peut écrire A sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ \dfrac{1}{\beta_1}v_1 & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{A}^{(1)} - \dfrac{1}{\alpha_1}v_1 \cdot {}^tv_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & \dfrac{1}{\beta_1}{}^tv_1 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}$$

   où β_1 est un nombre strictement positif que l'on précisera.
3. Montrer que $A^{(1)} = \tilde{A}^{(1)} - \dfrac{1}{\alpha_1}v_1 \cdot {}^tv_1$ est une matrice symétrique définie positive de taille $(n-1)$.
4. Itérer le processus pour en déduire la décomposition de Choleski de A. On écrira en particulier précisément la matrice B obtenue en fonction des vecteurs v_i et des nombres β_i.

4 Problème : volumes finis et différences divisées

Dans le cadre d'une méthode de volumes finis pour la résolution d'une équation différentielle ordinaire, se posent entre autres les deux problèmes de reconstruction et de choix du stencil, i.e. *des indices intervenant dans le calcul des inconnues. On travaille ici sur l'intervalle* $[0,1]$*, que l'on discrétise sous la forme :*

$$0 = x_{1/2} < x_{3/2} < \ldots < x_{n+1/2} = 1 \,. \tag{2}$$

On note I_i *l'intervalle* $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ *et* Δx_i *sa longueur,* i.e. *:*

$$\Delta x_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2} \,.$$

Le centre de l'intervalle I_i *est noté* x_i*, dont la valeur est donnée par la formule :*

$$x_i = \frac{x_{i-1/2} + x_{i+1/2}}{2} \,.$$

On note également $\Delta x = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta x_i$ *le pas maximal du maillage.*
Dans tout le problème, f *désigne la solution de l'équation différentielle, supposée régulière sur* $[0,1]$.

1. *Dans la première partie, on s'intéresse au problème de reconstruction suivant. Contrairement à la méthode des différences finies où les inconnues sont les valeurs de la fonction aux noeuds, dans les méthodes de volumes finis, les inconnues sont les moyennes de la fonction sur chacun des intervalles de discrétisation,* i.e. *:*

$$\bar{f}_i := \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(\xi)\, d\xi \,. \tag{3}$$

   On aboutit alors comme en différences finies à un système linéaire d'ordre n*. Après résolution du système linéaire d'inconnues* $(\bar{f}_i)$*, on souhaite connaître les valeurs de la fonction aux noeuds du maillage* $(x_{i+1/2})$.

On décide ici de déterminer sur chaque intervalle I_i un polynôme p_i de degré au plus $k-1$ (k dépend du choix du numéricien et correspond à l'ordre souhaité de la méthode) vérifiant sur I_i :

$$f(x) = p_i(x) + \mathcal{O}(\Delta x^k)\,. \tag{4}$$

On choisit de faire intervenir dans le calcul des coefficients du polynôme p_i les inconnues $(\bar{f}_i)$ sur les intervalles $I_{i-r}, \ldots, I_{i+s}$, i.e. *r cellules à gauche et s à droite. Le but est d'avoir le plus d'informations possible autour de l'intervalle I_i. Là aussi, r et s sont laissés à la discrétion du numéricien. Plus r et s sont grands, plus le calcul est précis puisqu'il fait apparaître le comportement de la fonction f sur un plus grand intervalle. On suppose dans cette première question que r et s sont fixés.*

(a) Démontrer qu'il existe un unique polynôme p_i de degré $k-1 = r+s$ vérifiant :

$$\forall\, j \in [\![i-r, i+s]\!],\ \frac{1}{\Delta x_j}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} p_i(\xi)\, d\xi = \bar{f}_j\,. \tag{5}$$

On pourra pour cela étudier d'une part le nombre d'inconnues par rapport au nombre d'équations puis montrer que si tous les $(\bar{f}_j)$ sont nuls, alors $p_i \equiv 0$.

On rappelle que si une fonction est positive et d'intégrale nulle sur un intervalle non vide, alors la fonction est identiquement nulle sur cet intervalle.

(b) *On cherche dans cette question à déterminer ce polynôme p_i. Pour cela, on note :*

$$F(x) = \int_0^x f(\xi)\, d\xi.$$

i. Exprimer $F(x_{i+1/2})$ en fonction des moyennes $(\bar{f}_j)$.

ii. *Soit P_i le polynôme d'interpolation de Lagrange qui interpole F aux $k+1$ points $x_{i-r-1/2}, \ldots, x_{i+s+1/2}$.* Montrer qu'en prenant $p_i = P_i'$, on vérifie bien les conditions (5).

iii. Prouver que :

$$P_i - F(x_{i-r-1/2}) = \sum_{m=1}^{k} \big(F(x_{i-r-1/2+m}) - F(x_{i-r-1/2})\big)\ell_m^{i,r,s} \tag{6}$$

où $\ell_m^{i,r,s}$ est le m-ième polynôme[1] de Lagrange aux points $x_{i-r-1/2}, \ldots, x_{i+s+1/2}$. En déduire une expression de p_i en fonction des $(\bar{f}_j)$. *On ne cherchera pas à expliciter $\ell_m^{i,r,s}$.*

iv. *On souhaite enfin calculer une approximation des valeurs de la fonction f aux noeuds $x_{i+1/2}$.* Exprimer en fonction des polynômes $\ell_m^{i,r,s}$ les coefficients $c_j^{(i)}$ tels que :

$$f_{i+1/2} := p_i(x_{i+1/2}) = \sum_{j=0}^{k-1} c_j^{(i)}\, \bar{f}_{i-r+j}.$$

Simplifier l'expression de $c_j^{(i)}$ dans le cas où le maillage est uniforme, *i.e.* lorsque les pas Δx_i sont constants de valeur Δx. Quelles sont alors les dépendances par rapport à i et Δx ? Quel est l'avantage numériquement ?

2. *On cherche dans la seconde partie à choisir de manière optimale le stencil $(I_{i-r}, \ldots, I_{i+s})$,* i.e. *les indices r et s.*

[1] En renumérotant $\tilde{x}_0 = x_{i-r-1/2}, \ldots, \tilde{x}_k = x_{i+s+1/2}$, le polynôme $\ell_m^{i,r,s}$ prend la valeur 1 en $\tilde{x}_m$ et 0 ailleurs.

(a) *On se donne tout d'abord (et de manière indépendante au problème)* $n \geqslant 2$ *points notés* $x_1, \ldots, x_n$. *Les différences divisées d'une fonction* g *aux points* (x_i) *sont définies par récurrence :*

- $g[x_i] := g(x_i)$ *;*
- *pour* $j \geqslant 1$, $g[x_i, \ldots, x_{i+j}] := \dfrac{g[x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}] - g[x_i, \ldots, x_{i+j-1}]}{x_{i+j} - x_i}$.

On définit par ailleurs $\Pi_0 = 1$, *puis pour* $j \in [\![1, n]\!]$ *:*

$$\Pi_j = \prod_{k=1}^{j} (X - x_k) .$$

i. Justifier que $(\Pi_0, \ldots, \Pi_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

ii. *On note :*
- *pour* $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, $Q_{x_i}^{x_j}$ *le polynôme d'interpolation de Lagrange de* g *aux points* $x_i, \ldots, x_j$ *;*
- $C_{x_i}^{x_j}$ *le coefficient dominant de* $Q_{x_i}^{x_j}$.

Prouver les relations :

$$Q_{x_1}^{x_i} - Q_{x_1}^{x_{i-1}} = C_{x_1}^{x_i} \Pi_{i-1} \quad (2 \leqslant i \leqslant n) \,; \tag{7}$$

$$\frac{(X - x_i) Q_{x_{i+1}}^{x_j} - (X - x_j) Q_{x_i}^{x_{j-1}}}{x_j - x_i} = Q_{x_i}^{x_j} \quad (2 \leqslant i < j \leqslant n) \,. \tag{8}$$

Pour cela, on évaluera les polynômes de gauche dans les deux relations en chacun des x_i *et on raisonnera par unicité.*

iii. En déduire la formule de Newton :

$$Q_{x_1}^{x_n} = \sum_{k=1}^{n} g[x_1, \ldots, x_k] \Pi_{k-1} \,. \tag{9}$$

On s'aidera des deux relations de la question précédente et on montrera en particulier que $C_{x_i}^{x_j} = g[x_i, \ldots, x_j]$.

iv. Montrer que si g est de classe $\mathcal{C}^{j-1}$, $j \leqslant n$, alors il existe ξ dans l'intervalle $[x_1, x_j]$ tel que :

$$g[x_1, \ldots, x_j] = \frac{g^{(j-1)}(\xi)}{(j-1)!} \,. \tag{10}$$

On ***admet*** *que dans le cas où* g *admet une discontinuité dans l'intervalle* $[x_1, x_j]$, *alors on a l'estimation d'erreur :*

$$g[x_1, \ldots, x_j] = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Delta x^{j-1}}\right) \,. \tag{11}$$

(b) *Revenons au problème initial du choix du stencil,* i.e. *des indices* r *et* s. *On rappelle que l'on cherche le meilleur stencil pour déterminer le polynôme d'approximation de* f *d'ordre* k *sur l'intervalle* I_i.

i. On part du stencil le plus simple, à savoir (I_i). Que vaut le polynôme $P_i^{(1)}$ d'interpolation de F aux deux noeuds de l'intervalle I_i selon la formule (9) ?

ii. *On a ensuite le choix d'étendre le stencil à gauche* (I_{i-1}, I_i) *ou à droite* (I_i, I_{i+1}). Donner les expressions des deux polynômes R_- et R_+ respectivement dans les deux cas précédents en fonction de $P_i^{(1)}$. Quelle est la différence entre R_- et R_+ ?

iii. Dans la mesure où l'on cherche à éviter les points de discontinuité dans le stencil, utiliser les résultats (10-11) pour déterminer le meilleur choix pour $P_i^{(2)}$ entre R_- et R_+. En déduire l'algorithme général de choix du stencil.

5 Exercices d'analyse

Exercice 1 *Soit g une fonction continue sur $[0,1]$. On cherche à déterminer les solutions régulières* i.e. *continues de l'équation fonctionnelle :*

$$f(x) + \int_0^x (x-t) f(t)\, dt = g(x)\,. \tag{12}$$

1. *Montrer qu'une solution continue de l'équation* (12) *est donnée par :*

$$f_0(x) = g(x) - \int_0^x \sin(x-t) g(t)\, dt\,. \tag{13}$$

2. On suppose désormais g de classe $\mathcal{C}^2(0,1)$. *Montrer que toute solution continue de l'équation* (12) *est de classe* $\mathcal{C}^2(0,1)$ *et que l'équation* (12) *est équivalente à l'équation différentielle :*

$$f + f'' = g''\,, \tag{14}$$

munie des conditions aux limites $f(0) = g(0)$ et $f'(0) = g'(0)$.

3. *En déduire qu'il existe une unique solution régulière de* (12).

Exercice 2 *Soient $\phi \in \mathcal{C}^1([a,b], I)$, $\psi \in \mathcal{C}^1([a,b], J)$ et $\Phi \in \mathcal{C}^1(I \times J, \mathbb{R})$.*

1. *Calculer la dérivée de la fonction $f : t \longmapsto \Phi\big(\phi(t), \psi(t)\big)$.*
2. *On pose :*

$$F(\phi, \psi) = \int_a^b f(t)\, dt\,.$$

Prouver que la différentielle de F est définie par :

$$d_{(\phi,\psi)} F(\tilde{\phi}, \tilde{\psi}) = \int_a^b \left(\tilde{\phi}(t) \frac{\partial \Phi}{\partial x}\big(\phi(t), \psi(t)\big) + \tilde{\psi}(t) \frac{\partial \Phi}{\partial y}\big(\phi(t), \psi(t)\big) \right) dt\,.$$

Exercice 3 *Soient $\phi \in \mathcal{C}^1([a,b], I)$, $\psi \in \mathcal{C}^1([a,b], I)$ et $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. Calculer la dérivée de la fonction :*

$$F : x \longmapsto \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(t)\, dt\,.$$

Exercice 4 *On se propose de démontrer dans cet exercice la formule :*

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(x,y)\, dy \right) \;=\; f(x,x) + \int_a^x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, dy\,. \tag{15}$$

où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2) \cap L^1(\mathbb{R}^2)$ vérifiant :

$$|\nabla f(x,y)| \leqslant \varphi(y).$$

sur $\mathbb{R}^2$, où $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$. On pose : $F : x \in \mathbb{R} \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(x,y)\, dy$.

1. *Quelle est la dérivée de F dans le cas où f est indépendant de x ?*
2. *Par quel changement de variables peut-on se ramener au segment $[0,1]$?*
3. *Justifier la dérivabilité de F après changement de variables.*
4. *En déduire une expression de F'. Par le même changement de variables que précédemment, établir la formule* (15).

Exercice 5 *Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. On cherche alors les solutions de l'équation :*

$$y + y'' = f \,, \tag{16a}$$
$$y(0) = 0 \,, \tag{16b}$$
$$y'(0) = 0 \,, \tag{16c}$$

sous la forme :

$$y(x) = \int_0^x k(x,t) f(t)\, dt \tag{17}$$

k étant une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]^2$.

1. *Justifier que s'il existe une solution au système* (16)*, alors elle est unique.*
2. *Déterminer des conditions suffisantes sur k pour que y donnée par* (17) *soit solution du système* (16)*.*
3. *En déduire la solution de* (16)*.*

Exercice 6 *Pour f continue sur $[0,1]$, on pose :*

$$\Phi_n(f)(x) = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 f(xt)(1-t)^n\, dt \,.$$

1. *Montrer que $\Phi_n(f)$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[0,1]$ puis calculer ses dérivées.*
2. *Déterminer la norme de l'application Φ_n.*
3. *Montrer que $\Phi_n = \Phi \circ \ldots \circ \Phi$, où Φ est l'endomorphisme défini par :*

$$\Phi(f)(x) = \int_0^x f(t)\, dt \,.$$

4. *Montrer que $\Phi(f)$ est la solution de l'équation $y' = f$ sur $[0,1]$ avec condition de Dirichlet homogène en 0. En déduire l'équation différentielle dont est solution $\Phi_n(f)$.*
5. *Justifier que pour tout g continue sur $[0,1]$, il existe une unique fonction f vérifiant :*

$$f - \Phi(f) = g \,.$$

6. *Prouver à l'aide d'un théorème du cours que si Φ_n admet une valeur propre $\lambda \neq 0$, alors $|\lambda| \geqslant \|\Phi_n\|$. Déterminer les valeurs propres de Φ_n.*

Exercice 7 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit (a_n) une suite de Cauchy dans E.

0. *Rappeler la définition de la borne inférieure d'un ensemble inclus dans $\mathbb{R}$. Démontrer alors que si* $\inf A$ *est bien définie, il existe une suite (x_n) de A qui converge vers* $\inf A$.
1. *Démontrer que la suite de fonctions $b_n : x \mapsto \|a_n - x\|$ converge simplement sur E.*
2. *On note f la limite simple de (b_n). Prouver que l'application $x \mapsto f(x)$ est continue.*
3. *Déterminer $\inf\limits_{x\in E} f(x)$. Quand la borne est-elle atteinte ?*
4. *Montrer que si E n'est pas complet, il existe une forme sur E continue mais non bornée.*

Exercice 8 *Soit (X, d) un espace métrique. Soit (f_n) est une suite de fonctions continues sur X et convergeant uniformément vers une limite f.*

1. (Cours) *Prouver que f est continue.*
2. *Soit (x_n) une suite de X convergeant vers $x \in X$. Prouver que la suite de terme général $f_n(x_n)$ converge vers $f(x)$.*
3. *On suppose que chaque fonction f_n admet un unique point fixe et que X est compact. Justifer l'existence d'un point fixe de f.*

Exercice 9 *Soit (α_n) une suite de réels positifs dont la série est convergente. On considère une application f, continue d'un espace métrique complet (X, d) dans lui-même et vérifiant la propriété :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, (x, y) \in X^2,\ d\big(f^{\circ n}(x) - f^{\circ n}(y)\big) \leqslant \alpha_n d(x, y)\,.$$

$f^{\circ n}$ désigne ici le n-ième itéré de f. En déduire que f admet un unique point fixe et que les suites récurrentes $x_{n+1} = f(x_n)$ convergent. Etudier la vitesse de convergence.

Exercice 10 *Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1 + nx^2)}\,.$$

1. *Montrer que la somme F de la série de terme général f_n est définie et continue sur $\mathbb{R}$.*
2. *Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.*
3. *Calculer $\lim\limits_{x \to 0_+} F(x)$.*

Exercice 11 *On définit la suite de fonctions (f_n) par la relation de récurrence :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [0, 1],\ f_{n+1}(x) = 2 \int_0^x \sqrt{f_n(t)}\, dt.$$

avec $f_0 = 1$.

1. *Calculer f_1, f_2 et f_3.*
2. *Montrer que f_n se met sous la forme $A_n x^{B_n}$. On déterminera en particulier l'expression de B_n en fonction de n ainsi qu'une relation de récurrence vérifiée par les A_n.*
3. *Justifier que :* $\ln A_{n+1} = -\displaystyle\sum_{j=0}^{n} 2^{-j} \ln(1 - 2^{j-n-1})$.
4. *Question annexe : soit (u_n) une suite réelle qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Démontrer que la suite (v_n) définie par :*
$$v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} 2^k u_k.$$
converge vers ℓ.
5. *En déduire la limite de* $\ln A_{n+1}$.
6. *Déterminer la limite simple de f_n. Y-a-t-il convergence uniforme ?*
7. *Quelle équation intégrale vérifie la limite de la suite (f_n) ?*

Exercice 12 *On note dans cet exercice E l'espace des fonctions continues sur $[0,\pi]$. On peut munir E (entre autres) des deux normes suivantes :*

$$\|f\|_\infty := \sup_{t\in[0,\pi]} |f(t)| \qquad et \qquad \|f\|_1 := \int_0^\pi |f(t)|\,dt\,.$$

On étudie ici la suite de fonctions définies pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$f_n : x \longmapsto \sqrt{n}\cos(x)\sin^n(x)\,.$$

1. *Rappeler brièvement pourquoi $\|\cdot\|_\infty$ définit bien une norme sur E.*
2. *Montrer que (f_n) converge simplement vers 0 sur $[0,\pi]$.*
3. *Etudier la convergence uniforme de (f_n). On prouvera au préalable que, pour $x \in [0,\pi]$:*

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

4. *Etudier la convergence de (f_n) en norme $\|\cdot\|_1$. On pourra déterminer une primitive de f_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Exercice 13 *On se place sur $E = \mathscr{C}^0(0,1)$. On munit E des normes suivantes :*

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt \qquad et \qquad \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|.$$

1. *Montrer que, pour tout $f \in E$, $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_\infty$ puis que toute suite de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_1)$.*
2. *En utilisant la suite de fonctions $f_n(t) = t^n$, montrer que les deux normes ne sont pas équivalentes.*
3. *Montrer que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.*
4. *On introduit la suite de fonctions $g_n(t) = \min\left(n, \dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$. Montrer que pour n et p dans $\mathbb{N}$, $\|g_{n+p} - g_n\|_1 \leqslant \dfrac{1}{n}$. En déduire que la suite est de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_1)$. Y converge-t-elle ?*
5. *Conclure.*

Exercice 14 *On note $E = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}$ lipschitzienne$\}$.*

1. *Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.*
2. *E est-il complet pour $\|\cdot\|_\infty$?*
3. *Pour $f \in E$, on pose $K(f) = \inf\{k \geqslant 0 \mid f$ k-lipschitzienne$\}$. K est-elle une norme ?*
4. *Pour $f \in E$, on pose $N(f) = K(f) + |f(0)|$. Montrer que N est une norme.*
5. *Etudier l'équivalence entre N et $\|\cdot\|_\infty$.*
6. *Montrer que (E, N) est complet.*

Exercice 15 *Pour* $f \in \mathscr{L}^2(0,1)$ *donnée, on considère l'équation :*

$$\big((1+x^2)y'\big)' = f, \tag{18a}$$
$$y(0) = 0, \tag{18b}$$
$$y(1) = 0. \tag{18c}$$

1. *Soit* y *une solution de* (18).
   (a) *En écrivant* $y(x) = \displaystyle\int_0^x y'(s)\,ds$*, montrer que :* $\|y\|_{L^2} \leqslant \|y'\|_{L^2}$*.*
   (b) *En multipliant* (18) *par* y*, montrer que :*
   $$\int_0^1 (1+x^2)y'(x)^2\,dx = -\int_0^1 f(s)y(s)\,ds.$$
   (c) *En déduire que* $\|y'\|_{L^2} \leqslant \|f\|_{L^2}\|y\|_{L^2}$*, puis que* $\|y\|_{L^2} \leqslant \|f\|_{L^2}$*.*
2. *Montrer que s'il existe une solution, alors elle est unique.*
3. *On définit pour* $x \in [0,1]$ *la fonction :*
   $$y_0(x) = \int_0^x f(s)(\arctan x - \arctan s)\,ds - \frac{4}{\pi}\arctan x \int_0^1 f(s)\left(\frac{\pi}{4} - \arctan s\right)\,ds.$$
   Vérifier que y_0 *est l'unique solution de* (18).
4. *Déduire des questions précédentes que l'opérateur* A *qui à* $f \in \mathscr{L}^2(0,1)$ *associe l'unique solution de* (18) *est linéaire et continu, de norme inférieure ou égale à 1.*
5. *Pour* $\alpha \in \mathbb{R}$*, on introduit l'équation :*
   $$\big((1+x^2)u'\big)' + \alpha u = f, \tag{19a}$$
   $$u(0) = 0, \tag{19b}$$
   $$u(1) = 0. \tag{19c}$$
   Montrer que ce système est équivalent à : $(\mathrm{Id}_{L^2} + \alpha A)\,u = Af$*.*
6. *En déduire que si* $|\alpha| < 1$*, l'équation* (19) *admet une unique solution, dont on donnera une expression sous forme de série.*

Exercice 16 *Soient* ϕ *la fonction* $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y,z) \mapsto (xy, x^2-y^2-z)$ *et* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathscr{C}^1$ *telle que* $F(0,0) = 0$ *et* $\partial_y F(0,0) \neq 0$*. On pose* $f = F \circ \phi$*. Montrer que l'équation* $f(x,y,z) = 0$ *fournit une fonction* $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie au voisinage de* $(0,0)$ *solution de l'équation :* $x\dfrac{\partial\psi}{\partial x} - y\dfrac{\partial\psi}{\partial y} = 2(x^2+y^2)$*.*

Exercice 17 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $\displaystyle\sum_{i,j}|a_{ij}|^2 < 1$*. En utilisant le théorème du point fixe, montrer que quel que soit* $b \in \mathbb{R}^n$*, le système d'équations :*

$$x_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \qquad i \in \{1,\dots,n\},$$

admet une unique solution. Qu'en déduire pour $\det(I_n - A)$*.*

6 Analyse Numérique

Exercice 18 *Soit* $f : x \longmapsto e^{e^x - 1}$.

1. *Montrer que pour tous* $n \in \mathbb{N}$ *et* $x \in \mathbb{R}$, *il existe une suite de polynômes* (P_n) *telle que :* $f^{(n)}(x) = P_n(e^x) f(x)$. *Montrer en particulier que :*
$$P_0 = 1 \qquad et \qquad P_{n+1} = X(P_n + P_n').$$
2. *On note* S_n^k *le coefficient de degré* k *de* P_n. *Evaluer* S_n^0, *puis montrer que* $S_{n+1}^{k+1} = S_n^k + (k+1) S_n^{k+1}$.
3. *On note* $B_n = f^{(n)}(0)$. *Montrer que* $P_n'(1) \leqslant n P_n(1)$, *puis que* $B_n \leqslant n!$.
4. *Prouver par récurrence que* P_n *est scindé à racines simples.*

Exercice 19 *Les polynômes de Laguerre sont définis pour* $n \in \mathbb{N}$ *par :*
$$L_n = \frac{e^{-x}}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^x).$$

1. *On pose* $\omega(x) = e^{-x}$ *et* $I =]0, +\infty[$. *Montrer que l'espace* $L^2_\omega(I)$ *est bien défini.*
2. *Montrer que* L_n *est une suite de polynômes dont on déterminera le degré, le terme dominant et le terme d'ordre* 0. *On montrera en particulier la relation :*
$$L_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} X^k.$$
3. *Montrer que la famille* (L_n) *est orthonormale dans* $L^2_\omega(I)$.
4. *Prouver que* L_n *est solution de l'équation différentielle :*
$$X L_n'' + (1 - X) L_n' + n L_n = 0.$$
5. *Déterminer une relation de récurrence entre les termes de la suite.*

Exercice 20 *On se propose de démontrer la formule d'inversion de Pascal :*
Soit (b_i) *une famille de* $n+1$ *éléments d'un anneau commutatif* A. *On définit alors :*
$$\forall\, p \in \{0, \dots, n\},\ a_p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} b_k.$$
Alors :
$$\forall\, p \in \{0, \dots, n\},\ b_p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} a_k.$$

1. *Démontrer la formule précédente par récurrence.*
2. *Démontrer la formule précédente à l'aide d'un raisonnement matriciel. On pourra pour cela utiliser la matrice de passage de la base* $(1, 1+X, \dots, (1+X)^n)$ *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^n$.

Exercice 21 *Calculer le déterminant :*
$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & 0 & b & a \end{vmatrix}.$$

Exercice 22 *Soit $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\rho(A) < 1$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on définit l'application $\|\cdot\|_*$ par :*

$$\|x\|_* = \sum_{j=0}^{+\infty} \|A^j x\|.$$

1. *Montrer que cette application est une norme sur $\mathbb{R}^n$.*
2. *Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\|_* = 1$. Calculer $\|Ax\|_*$ en fonction de $\|x\|$ et en déduire que $\|A\|_* < 1$.*
3. *Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une norme subordonnée $\|\cdot\|_{**}$ telle que $\|B\|_{**} \leqslant \rho(B) + \varepsilon$.*

Exercice 23 *On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne usuelle et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme subordonnée associée.*

1. *Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. On note σ_1 et σ_n respectivement les plus petite et plus grande valeurs propres de la matrice ${}^tAA$. Montrer que $Cond_2(A) = \sqrt{\dfrac{\sigma_n}{\sigma_1}}$.*
2. *On suppose dans cette question uniquement que A est symétrique définie positive. Donner une nouvelle expression de $Cond_2(A)$ en fonction des valeurs propres de A.*
3. *Montrer que $Cond_2(A) = 1$ si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tels que $A = \alpha Q$.*
4. *On suppose que $A = QR$ avec $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $Cond_2(A) = Cond_2(R)$.*
5. *Pour A et B matrices symétriques définies positives, justifier l'inégalité :*

$$Cond_2(A+B) \leqslant \max\{Cond_2(A), Cond_2(B)\}.$$

Exercice 24 *Soit A la matrice, pour $\alpha \in \mathbb{R}$:*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ -1 & \alpha & -1 \\ 0 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$$

1. *Déterminer les valeurs propres de A.*
2. *Pour quelles valeurs de α la matrice A est-elle inversible ?*
3. *Pour $\alpha \neq 0$, étudier une itération de l'algorithme de Jacobi pour la résolution du système $Ax = b$. Pour quelles valeurs de α l'algorithme converge-t-il ?*
4. *Reprendre la question précédente avec Gauss-Seidel.*

Exercice 25 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dans tout l'exercice, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, on pose : $\Lambda_i = \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n \\ k\neq i}} |a_{ik}|$. La matrice A est dite est dite :*

- *à* ***diagonale dominante*** *si : $\forall\, i \in \{1,\dots,n\},\ |a_{ii}| \geqslant \Lambda_i$.*
- *à* ***diagonale strictement dominante*** *si : $\forall\, i \in \{1,\dots,n\},\ |a_{ii}| > \Lambda_i$.*
- *à* ***diagonale fortement dominante*** *si A est à diagonale dominante et s'il existe $i \in \{1,\dots,n\}$ tel que $|a_{ii}| > \Lambda_i$.*

1. *Montrer que pour toute matrice A, toute valeur propre appartient à l'union des disques $\mathcal{D}_k$ de Gerschgörin de centres a_{kk} et de rayons Λ_k.*
2. *Montrer que si A est à diagonale strictement dominante, alors A est inversible puis prouver que la méthode de Jacobi converge.*
3. *Montrons enfin que si A est à coefficients diagonaux strictement positifs et si A est à diagonale strictement dominante, alors la partie réelle de chaque valeur propre de A est strictement positive.*